G. Zucker.

Vorlesungen

über die

höhere Mathematik.

Vom Professor

Andreas von Ettingshausen,

Erster Band.

Vorlesungen über die Analysis.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold.

1827.

Dem

wohlgebornen Herrn

Ignaz Lindner,

Major und Professor der Mathematik im kaiserl. königl. Bombardier-Corps,

als ein Zeichen aufrichtiger Freundschaft und dankbarer Erinnerung an einstens genossene gütige Unterstützung im Studium der mathematischen Wissenschaften

gewidmet

vom Verfasser.

Vorrede.

Während der wenigen, seit meinem Antritte des Lehramtes der höheren Mathematik an der hiesigen Universität verflossenen Jahre, bin ich nicht nur allein von meinen Zuhörern, sondern auch von Freunden der mathematischen Wissenschaften, deren Verhältnisse es nicht gestatteten, meine öffentlichen Vorträge zu besuchen, so oft um Mittheilung der denselben zum Grunde liegenden Hefte ersucht worden, daß ich mich genöthiget sehe, diese dem Drucke zu übergeben.

Die Dauer des Unterrichtes, welchem ich vorstehe, beträgt, der gegenwärtigen Einrichtung der oben genannten Lehranstalt zufolge, für jeden einzelnen Zuhörer zwei Jahre; täglich findet eine Vorlesung Statt, welche abwechselnd dem einen oder dem anderen dieser Jahrgänge gehört; die Anzahl der sämmtlichen Lectionen für einen Jahrgang entfernt sich daher bei der vorgeschriebenen Ausdehnung des Studienjahres nicht bedeutend von hundert. Um hievon zur Ausarbeitung zweckmäßiger Beispiele über die vorgetragenen Lehren und zur Wiederholung schwierigerer Sätze, wovon der günstige Erfolg des Unterrichtes größtentheils abhängt, die nöthige Zeit zu erübrigen, habe ich mich darauf beschränkt, für jeden der beiden Lehrcurse sechzig Vorlesungen zu entwerfen, welche ich hiemit dem Publikum in zwei Bänden vor Augen lege.

Ich gestehe, daß ich mich in Betreff der zweckmäßigsten Wahl der abzuhandelnden Gegenstände, mit Rücksicht auf den doppelten durch den von mir ertheilten Unterricht zu erreichenden Zweck, nämlich formelle Bildung der Zuhörer und Ausrüstung derselben mit den zu den mannigfaltigen practischen Anwendungen der Mathematik dienlichsten Hülfsmitteln, bei der ungeheuren Größe des

Gebietes dieser Wissenschaft nicht selten in Verlegenheit befand. Ein Lehrer, welcher die Analysis liebt und sich in derselben mit Leichtigkeit bewegt, läuft manchmal Gefahr, seinen Schülern auf Kosten der practisch brauchbareren Methoden zu reichlich mit bloßen Kunststücken des Calculs aufzuwarten; ob ich jedes Mal so glücklich war, die goldene Mittelstraße zu treffen, muß ich dem Urtheile der Sachverständigen anheim stellen. Ich hoffe wenigstens diejenigen, denen weder die Anlage zur Mathematik, noch die nöthigen Vorkenntnisse aus den Elementen dieser Wissenschaft mangeln, und welche meinen Vorlesungen mit Aufmerksamkeit folgen, in den Stand zu setzen, die besten Werke der Neueren ohne große Mühe und mit Nutzen zu studiren; eine Hoffnung, in welcher mich die Fortschritte, welche ich bei vielen meiner Schüler mit Vergnügen bemerke, bestärken. Stets aber habe ich ernstlich nach Gründlichkeit gestrebt, und mir durchaus keine Voraussetzung erlaubt, welche in einem streng wissenschaftlichen Systeme eines Beweises bedarf.

Die Mathematiker haben sich oft zu den überraschendsten Entdeckungen den Weg durch die Freiheit eröffnet, Resultate des analytischen Calculs über die Grenzen hinaus auszudehnen, an welche die Gültigkeit derselben, vermöge der ursprünglichen in die Rechnung verwebten Bedingungen, gebunden war. Hieher gehört vornehmlich der Gebrauch divergirender unendlicher Reihen als bloßer Transformationen der durch dieselben vorgestellten Größen, welchen selbst der unsterbliche Euler in der Abhandlung de seriebus divergentibus (Novi Commentarii Acad. Petropolitanae, Tom. V) ausdrücklich in Schutz genommen, und als völlig zuläßig erklärt hat. Seitdem aber neuere Untersuchungen (man sehe unter andern Poisson's Bemerkungen in dem Journal de l'école polytechnique, cahier 19, pag. 501 etc.) die Unrichtigkeit mancher mittelst divergirender Reihen erhaltenen Ergebnisse analytischer Deductionen bemerklich machten, unterliegt die Nothwendigkeit, diese Reihen aus der Analysis gänzlich zu verbannen, keinem Zweifel mehr. Wo sie richtige Resultate gewäh-

ren, findet man immer, daß die zu einer endlichen Anzahl ihrer Glieder hinzukommende Ergänzung auf die Resultate der Rechnung keinen Einfluß ausübt. Sobald man sich aber außer Stande befindet, diesen Einfluß zu beurtheilen, ist man der Gefahr zu irren preisgegeben. Ich habe deßhalb mich in meinen Vorlesungen der Anwendung divergirender Reihen enthalten, und bin gleich im Eingange derselben bemüht gewesen, die bis jetzt bekannten, vorzüglich von Gauß und Cauchy bearbeiteten, Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen aus einander zu setzen. Dasselbe gilt auch von den Producten unendlicher Factorenfolgen, und von den unendlichen Kettenbrüchen.

Die Irrthümer, welche sich in die Lehre von der Entwickelung der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen eines Bogens nach den Potenzen der Sinusse und Cosinusse des einfachen Bogens und der letzteren Größen nach den ersteren, größtentheils wegen Außerachtlassung des wahren Sinnes der Moivre'schen Binomialformel, eingeschlichen haben, und von Poisson zuerst wahrgenommen worden sind, kamen erst vor Kurzem durch Poinsot und Ohm wieder zur Sprache, und zogen die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich. Ich suchte dieselben in gegenwärtiger Schrift nach meiner Weise zu beseitigen. Einige der bei diesem Gegenstande begangenen Mißgriffe rühren von einer zu weit getriebenen Anwendung der nicht immer gleich sicheren und zuläßigen Methode der unbestimmten Coefficienten her; ich habe daher den von dieser Methode unabhängigen Deductionen durchgehends den Vorzug gegeben.

Die Differenzialrechnung habe ich, dem Beispiele der ausgezeichnetsten Lehrer der neueren Zeit folgend, auf die Lehre von den Grenzen veränderlicher Größen gegründet, indem ich die Differenzialien als unendlich abnehmende Differenzen betrachte. Diese Darstellungsweise eines der wichtigsten Theile der gesammten Analysis besitzt, meines Erachtens, vor allen übrigen nicht nur allein den Vorzug der größeren Einfachheit, sondern auch, was sie nicht minder anempfiehlt, den einer untadelhaften Strenge;

vorausgesetzt, daß man die bloß unendlich klein werdenden Größen nicht, indem man sie durchaus zu wirklich unendlich kleinen Größen machen will, aus einem irrigen Gesichtspuncte ansieht.

Beispiele über die in dieser Schrift entwickelten theoretischen Sätze und Methoden wird man daselbst keine anderen finden, als sich durch die Anwendungen früherer Sätze zur Begründung folgender von selbst darbieten. Ich werde aber, um den Nutzen, welchen ich durch die Herausgabe gegenwärtiger Vorlesungen stiften dürfte, nach Kräften zu steigern, aus dem zum Gebrauche bei meinen Vorträgen bereits gesammelten Vorrathe von Beispielen die instructivsten herausheben, und meiner jetzigen Arbeit binnen kurzer Frist nachfolgen lassen.

Wien, im Jänner 1827.

Inhalt des ersten Bandes.

Seite

Vorlesungen

über die

Analysis.

Erste Vorlesung.

Über den Begriff der Analysis und über die Bezeichnung und Eintheilung der Functionen.

Die Analysis, welche den Gegenstand gegenwärtiger Vorlesungen ausmacht, ist ein Theil der allgemeinen Größenlehre, oder der sogenannten reinen Mathematik. Sie beschäftiget sich mit der Betrachtung aller Formen der gegenseitigen Abhängigkeit der Größen, in so fern dieselben durch Zahlen ausgedrückt sind. Ihr Gebiet ist einer unbegrenzten Erweiterung fähig. Die Arithmetik, d. i. die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen und ihren ursprünglichen oder Grund-Verbindungen (Rechnungsspecies), wird von derselben als bekannt vorausgesetzt.

Man pflegt, obgleich nicht wissenschaftlich, von einer niederen und höheren Analysis zu sprechen. Dieß rührt von dem fast allgemein eingeführten, dem Zwecke des Elementar-Unterrichtes entsprechenden Gebrauche her, schon in der Arithmetik mehrere der Analysis gehörende Lehren vorzutragen.

Die Abhängigkeit einer Größe *) von andern wird dadurch erkannt, daß die erstere sich ändert, wenn die letzteren andere Werthe erhalten. Zwei Größen, wovon die eine auf die andere durchaus keinen Einfluß ausübt, sind von einander unabhängig. Zur vollständigen Einsicht in die Beschaffenheit einer Größe wird erfordert, daß man alle Größen, durch welche die Quantität der ersteren bestimmt wird, kenne, und diese aus jenen zu berechnen im Stande sey.

*) Wenn hier von einer Größe die Rede ist, so verstehen wir darunter bloß die Zahl, welche das Verhältniß dieser Größe zu einer andern gleichartigen, als Einheit betrachteten angibt, verbunden mit dem Zeichen, welches andeutet, ob diese Größe in Bezug auf andere, mit welchen sie der Gattung nach als gleichartig behandelt wird, sich additiv oder subtractiv verhält.

Um die Betrachtung der Abhängigkeit einer Größe U von anderen a, b, c ... x, y, z zu erleichtern, oder wohl gar möglich zu machen, pflegt man oft nur die Verbindung, in welcher U mit einer oder mit einigen der Größen a, b, c ... x, y, z steht, zu untersuchen, und den Zusammenhang von U mit den übrigen dieser Größen vor der Hand unbeachtet zu lassen. Dieß geschieht, indem man den letzteren Größen bestimmte, während der ganzen Untersuchung unveränderlich beizubehaltende Werthe beigelegt denkt, und nur die ersteren als unbestimmte, jedes ihrer Natur angemessenen Werthes fähige Größen ansieht. In dieser Hinsicht werden die Größen, von welchen eine andere abhängt, in beständige (constante) und in veränderliche (variable) eingetheilt. Die beständigen Größen werden in der Regel durch die ersten, die veränderlichen aber durch die letzten Buchstaben des Alphabetes vorgestellt.

Denkt man sich das Gesetz der Abhängigkeit einer Größe U von den beständigen Größen a, b, c ... und von den veränderlichen x, y, z ... durch eine Gleichung ausgedrückt, so heißt U eine Function dieser Größen; jedoch werden, wenn von einer Function die Rede ist, meistens nur die veränderlichen Größen, auf welche sie sich bezieht, genannt.

Mit Hülfe des so eben festgesetzten Begriffes läßt sich die Analysis kurz als die Lehre von den Functionen bezeichnen.

Ist die Gleichung, welche U mit x, y, z ... verknüpft, bereits aufgelöst, so heißt U eine gesonderte Function von x, y, z ... In diesem Falle läßt sich die erwähnte Gleichung immer so ordnen, daß diesseits des Gleichheitszeichens U allein und in der ersten Potenz erscheint; jenseits desselben aber ein aus den veränderlichen Größen x, y, z ... und aus den beständigen a, b, c ... gebildeter, die Größe U nicht enthaltender, Ausdruck sich befindet. Ist hingegen die Gleichung zwischen U und x, y, z ... noch unaufgelöst, so wird U eine ungesonderte Function von x, y, z ... genannt. So ist z. B. $U = ax^3 + bx^2y + cy^3$ eine gesonderte Function von x und y; durch die Gleichung $U^2 - 2xyU + a^2b^2 = 0$ aber wird eine ungesonderte Function von x und y dargestellt.

Der Werth einer Function veränderlicher Größen ist, an sich betrachtet, völlig unbestimmt, und wird nur dann bestimmt, wenn diese veränderlichen Größen fixe Werthe erhalten. Es kann der Fall eintreten, daß einer und derselben individuellen Bestimmung von x, y, z ...

mehrere fixe Werthe von U Genüge leisten. Ist z. B. $U^2 - 2xyU + a^2b^2 = 0$, so hat man sowohl $U = xy + \sqrt{x^2y^2 - a^2b^2}$
als auch $U = xy - \sqrt{x^2y^2 - a^2b^2}$.

Man sagt in solchen Fällen im Allgemeinen, die Function U sey eine vielförmige, und unterscheidet nach Beschaffenheit der Umstände, zweiförmige, dreiförmige Functionen u. s. w. im Gegensatze mit den einförmigen Functionen, welche für jede Specialisirung der veränderlichen Größen nur einen Werth erhalten.

Die Art, auf welche die beständigen und veränderlichen, einer Function zum Grunde liegenden Größen mit einander verknüpft sind, bestimmt die Form der Function. So haben die Functionen $a^2 + bx + cx^2$ und $a^2 + by + cy^2$ einerlei Form; dieselbe weicht aber von der Form der Function $b^2 + ax$ ab.

Jede Function ist selbst eine veränderliche Größe, denn sie ändert sich, wenn die veränderlichen Größen, auf welche sie sich bezieht, andere Werthe erhalten. Man kann also die Functionen, der obigen Übereinkunft gemäß, auch durch die letzten Buchstaben des Alphabetes vorstellen.

In vielen Fällen, besonders wenn man den Einfluß bemerklich machen will, welchen verschiedene Umstaltungen der veränderlichen Größen auf die Functionen ausüben, erschwert die Bezeichnung der Functionen durch einzelne Buchstaben die Übersicht der analytischen Operationen. Man setzt dann, zur Bezeichnung der Functionen den in Klammern eingeschlossenen und durch Beistriche von einander getrennten Zeichen der veränderlichen Größen einen der Buchstaben F, f, φ, ψ u. d. gl. vor, durch deren Verschiedenheit auf die Verschiedenheit der Formen der Functionen aufmerksam gemacht wird. So bedeuten $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ ... verschieden geformte Functionen von x, und $f(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ verschieden geformte Functionen von x, y, z; die Symbole $f(x)$ und $f(y)$ hingegen, in so fern sie in derselben Rechnung vorkommen, zeigen zwei Functionen an, die sich durch nichts, als durch die Bezeichnung der veränderlichen Größe von einander unterscheiden. Das Symbol $f(xy)$, worin die veränderlichen Größen durch keinen Beistrich abgesondert stehen, stellt eine Function des, wie eine einzige Größe zu betrachtenden, Productes xy vor. Will man die Anwesenheit einer beständigen Größe in einer Function, besonderer Zwecke wegen, bemerklich machen, so setzt man sie ebenfalls hinter das Functionszeichen. In diesem Sinne ist $f(x, y, a)$ eine Function,

welche nebst den veränderlichen Größen x und y, auch noch die beständige Größe a enthält.

Bisweilen ist man in der Lage, Functionen von Functionen zu betrachten. In dieser Beziehung zeigt $ff(x)$ eine Function an, welche aus $f(x)$ entspringt, wenn man daselbst statt der veränderlichen Größe x die Function $f(x)$ setzt. Ist z. B. $f(x) = \sqrt{1 + ax}$, so ist

$$ff(x) = \sqrt{1 + a\sqrt{1 + ax}}.$$

Die Bezeichnungen $ff(x)$, $fff(x)$, u. s. w. werden durch den Gebrauch der Wiederholungszeiger sehr vereinfacht. Man schreibt $f^2(x)$ statt $ff(x)$; $f^3(x)$ statt $fff(x)$ u. s. w. In dem Sinne dieser Bezeichnung ist $f^1(x) = f(x)$; und überhaupt, wenn m, n ganze positive Zahlen bedeuten:

$$(1) \qquad f^m f^n(x) = f^{m+n}(x).$$

Man kann dieser Bezeichnung eine größere Ausdehnung geben, wenn man sich der Nulle, wie auch negativer Zahlen als Zeiger am Functionszeichen bedient. Setzt man nämlich in der Gleichung (1)

$m = 1$, $n = 0$, so ergibt sich

$ff^0(x) = f(x)$, woraus

$f^0(x) = x$ folgt.

Läßt man ferner $m = 1$, $n = -1$ seyn, so erhält man

$$ff^{-1}(x) = f^0(x) = x,$$

d. h. $f^{-1}(x)$ steht zu x in derselben Relation, wie x zu $f(x)$.

Setzt man endlich $n = -m$, so findet man:

$$(2) \qquad f^m f^{-m}(x) = x,$$

woraus die Bedeutung von $f^{-m}(x)$ hinreichend erhellet.

Die Wiederholungszeiger lassen sich überhaupt bei der Bezeichnung jeder nach demselben Gesetze wiederholten Bildungsweise einer Größe aus einer andern mit Vortheil anwenden. Denkt man sich nämlich aus einer Größe u eine andere nach einem beliebigen Gesetze abgeleitet, und bezeichnet man das Resultat dieser Derivation durch δu, so ist $\delta^2 u$ eine Größe, welche aus δu so entsteht, wie δu aus u; $\delta^0 u$ ist u selbst, und $\delta^{-1} u$ ist eine Größe, aus welcher durch das erwähnte Derivationsverfahren u entspringen würde. Will man δu die derivirte Größe von u, und u die primitive Größe von δu nennen, so ist $\delta^{-1} u$ die primitive Größe von u.

Die Functionen werden in Bezug auf ihre Form in algebrai-

sche und in transcendente eingetheilt. Algebraische Functionen heißen diejenigen, bei welchen die veränderlichen Größen unter sich und mit den beständigen Größen bloß durch die arithmetischen Grundoperationen, das ist durch Addition, Multiplication, Potenzirung für beständige Exponenten und durch die umgekehrten Operationen, Subtraction, Division und Extraction, zusammenhängen. Alle übrigen Functionen werden transcendente genannt. Dergleichen sind die Potenzen mit veränderlichen Exponenten (Exponentialgrößen), ferner die logarithmischen, die Kreis-Functionen, und unzählige andere.

Man nennt eine algebraische Function eine rationale, wenn die darin erscheinenden veränderlichen Größen bloß mit ganzen Exponenten versehen sind; ferner heißt sie eine ganze Function, wenn die veränderlichen Größen bloß positive Exponenten führen. Findet das Gegentheil Statt, so ist die Function irrational, oder gebrochen.

Jede rationale und ganze Function der veränderlichen Größen $x, y, z \ldots$ besteht aus Gliedern von der Form $A x^m y^n z^p \ldots$, wobei die Exponenten $m, n, p \ldots$ ganze positive Zahlen sind, und der Coefficient A bloß aus beständigen Größen zusammengesetzt ist. Die Summe der Exponenten der veränderlichen Größen $x, y, z \ldots$, nämlich $m + n + p + \ldots$, heißt der Ordnungsexponent des Gliedes $A x^m y^n z^p \ldots$ Der höchste Ordnungsexponent der Glieder bestimmt die Ordnung der Function. Enthält die rationale ganze Function bloß eine veränderliche Größe x, so hat sie die Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^m$, und der höchste Exponent von x, nämlich m, zeigt ihre Ordnung an.

Jede rationale gebrochene Function läßt sich auf die Form $\frac{Z}{N}$ bringen, wobei Z und N ganze rationale Functionen sind, und keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Die Ordnung einer solchen Function wird durch die Differenz der Ordnungsexponenten des Zählers und Nenners gemessen.

Zweite Vorlesung.

Über die unendlich groß und unendlich klein werdenden Größen und über die Grenzen veränderlicher Größen.

---

1. Wenn man sich den numerischen Werth einer veränderlichen Größe dergestalt wachsend vorstellt, daß er nach und nach größer wird, als jede denkbare noch so große Zahl, so sagt man diese Größe wachse unendlich, oder sie werde unendlich groß; läßt man aber den numerischen Werth einer veränderlichen Größe so abnehmen, daß er kleiner wird, als jede angebbare noch so kleine Zahl, ohne jedoch gänzlich zu verschwinden, so sagt man diese Größe nehme unendlich ab, oder sie werde unendlich klein. Hier ist also nur von unendlich groß und unendlich klein werdenden, nicht aber von wirklich unendlich großen und unendlich kleinen Größen die Rede.

Aus diesen Erklärungen lassen sich sogleich mehrere Folgerungen ableiten, wovon die wichtigsten hier angeführt werden sollen.

1) Die Summe mehrerer unendlich wachsender, gleichnamiger, d. i. mit demselben Zeichen versehener Größen; ferner die Summe einer wie immer beschaffenen unendlich groß werdenden und einer beständigen Größe, wächst unendlich; die Summe zweier unendlich wachsender ungleichnamiger Größen hingegen kann unendlich groß werden, ungeändert bleiben, und unendlich abnehmen.

2) Die Summe gleichnamiger oder ungleichnamiger unendlich abnehmender Größen wird unendlich klein.

3) Das Product unendlich groß werdender Größen untereinander und mit beständigen Größen wächst unendlich; das Product unendlich klein werdender Größen untereinander und mit beständigen Größen nimmt unendlich ab.

4) Jede Potenz mit einem unveränderlichen positiven Exponenten wird unendlich groß oder unendlich klein, je nachdem ihre Wurzel unendlich zu- oder abnimmt; ist der Exponent der Potenz negativ, so findet das Gegentheil Statt.

5) Ein Bruch, dessen Zähler unveränderlich ist, wird unendlich

klein, wenn sein Nenner unendlich wächst, und unendlich groß, wenn der Nenner unendlich abnimmt.

6) Eine Größe, welche unaufhörlich gleiche, oder stets wachsende Zusätze empfängt, wird unendlich groß.

7) Eine Potenz a^x, deren Wurzel a beständig ist und größer als die Einheit, und deren Exponent x positiv ist und unendlich zunimmt, wird, in so fern sie im reellen Zustande bleibt, unendlich groß. Denn aus der Gleichung $a^{x+u} = a^x + a^x(a^u - 1)$ erhellet, daß a^x, wie auch der Zusatz, welcher zu a^x hinzukommen muß, um a^{x+u} zu erzeugen, wächst, wenn man den Exponenten x fortwährend um u vergrößert, woraus der zu beweisende Satz nach 6) folgt. Ist aber der Exponent unter den angeführten Umständen negativ, so wird die Potenz, wegen $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, nach 5) unendlich klein.

8) Ist hingegen $a < 1$, so wird bei dem unendlichen Wachsen der positiven Größe x, die Potenz a^x unendlich klein und a^{-x} unendlich groß. Denn es ist in diesem Falle $\frac{1}{a} > 1$, folglich $\frac{1}{a^x}$ eine mit x zugleich unendlich wachsende Größe.

9) Wenn x unendlich wächst und $A, B, C, D \ldots . M, N$ unveränderliche Größen sind, so wird nach 1) und 3) $Ax + B$ unendlich groß, folglich gilt dasselbe auch von $(Ax+B)x+C = Ax^2+Bx+C$, und daher auch von

$$(Ax^2 + Bx + C)x + D = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

u. s. w., woraus zu ersehen ist, daß bei dem unendlichen Wachsen von x jede ganze rationale Function dieser veränderlichen Größe, wie

$$(1) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N$$

unendlich zunimmt.

Läßt man hiebei x positiv seyn, und bezeichnet man den numerischen Werth des größten mit A ungleichnamigen Coefficienten durch G, so findet man auf dem so eben vorgezeichneten Wege, daß die Function (1), wenn nicht früher, doch wenigstens sobald $x = 1 + \frac{G}{A}$ geworden ist, fortwährend das Zeichen des höchsten Gliedes Ax^m erhält. Da man zu demselben Resultate gelangt, wenn man die Zeichen aller auf Ax^m folgenden Glieder verändert, so muß, bei dem unendlichen Wachsen von x, das höchste Glied der Function (1) größer werden, als die Summe aller übrigen Glieder.

10) Aus 2, 3 und 4 ergibt sich, daß eine ganze rationale Function von der Form

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots + Mx^m,$$

deren Glieder sämmtlich mit der veränderlichen Größe x verbunden sind, bei dem unendlichen Abnehmen der letzteren unendlich klein wird.

Es wird also auch

$$Bx + Cx^2 + \ldots + Mx^{m-1} < A,$$

folglich $Bx^2 + Cx^3 + \ldots + Mx^m < Ax$

und $Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + \ldots + Mx^{n+m-1} < Ax^n$;

d. h. bei dem unendlichen Abnehmen von x wird jedes Glied einer ganzen rationalen Function dieser Veränderlichen größer, als die Summe aller Glieder von den höheren Ordnungen.

II. Wenn eine veränderliche Größe x bei den verschiedenen Werthen, welche sie anzunehmen vermag, sich einer unveränderlichen Größe a so nähert, daß der Unterschied zwischen beiden kleiner wird, als jede denkbare noch so kleine Größe, ohne jedoch zu verschwinden, so heißt a die Grenze von x. Wir werden diese Beziehung durch die Bezeichnung

$$\lim. x = a$$

ausdrücken.

Man kann die Nulle als die Grenze jeder unendlich abnehmenden Größe betrachten; eine unendlich wachsende Größe hingegen läßt keine Grenze zu. Indessen erlauben sich doch die Mathematiker, der Bequemlichkeit und Kürze des Ausdruckes wegen, auch für unendlich wachsende Größen eine Grenze zu fingiren, welche sie durch das Zeichen ∞ vorstellen und gerade zu »eine unendlich große Größe« nennen. Daß man diese Redensart nicht buchstäblich zu deuten, und was man sich dabei zu denken habe, bedarf nunmehr keiner weiteren Erläuterung. Daher rührt auch die Eintheilung der Grenzen in endliche und in unendliche. Wenn wir sagen, eine Größe sey an eine Grenze gebunden, so denken wir immer an eine von ∞ verschiedene Grenze, die aber auch $= 0$ seyn kann.

Wenn die beständige Größe a die Grenze einer veränderlichen Größe x ist, so kann man immer $x = a \pm \omega$ setzen, wobei ω eine des unendlichen Abnehmens fähige Größe anzeigt. Schreibt man nun $\lim. x$ statt a, so hat man die Gleichung

$$x = \lim. x \pm \omega.$$

Wird x unveränderlich, so muß ω, wovon die Veränderlichkeit von x abhing, $=0$ gesetzt werden. Es ist also für jede beständige Größe c, $lim.\,c = c$. Diese Bemerkung dient dazu, Sätze, welche für veränderliche Größen bewiesen worden sind, auf den Fall zu übertragen, wenn einige dieser Größen in beständige verwandelt werden.

Folgende Eigenschaften der Grenzen veränderlicher Größen verdienen, ihrer häufigen Anwendungen wegen, hier angeführt zu werden:

1) Es seyen x und y veränderliche, an bestimmte Grenzen gebundene, Größen, so ist

$$lim.(x \pm y) = lim.\,x \pm lim.\,y;$$

denn sind ω, v positive oder negative des unendlichen Abnehmens fähige Größen, so hat man

$$x = lim.\,x + \omega,\quad y = lim.\,y + v,$$

folglich $\quad x \pm y = lim.\,x \pm lim.\,y + \omega \pm v.$

Aber $\omega \pm v$ kann unendlich klein werden (I, 2)), und dabei nähert sich $x \pm y$ ohne Ende der Summe $lim.\,x \pm lim.\,y$, daher ist

$$lim.\,(x \pm y) = lim.\,x \pm lim.\,y.$$

2) Setzt man in der so eben gefundenen Gleichung $y = x$, so wird, wenn man das untere Zeichen beibehält:

$$lim.\,(x - y) = 0 = lim.\,x - lim.\,y,$$

$$\text{also}\quad lim.\,y = lim.\,x;$$

d. h. sind zwei veränderliche Größen in jedem ihrer Zustände gleich, so haben sie auch gleiche Grenzen.

3) Es ist unter den in 1) gemachten Voraussetzungen

$$lim.\,(xy) = lim.\,x\,.\,lim.\,y;$$

denn die Gleichungen $x = lim.\,x + \omega$ und $y = lim.\,y + v$ geben

$$xy = lim.\,x\,.\,lim.\,y + v\,lim.\,x + \omega\,lim.\,y + \omega v,$$

wobei die Summe $v\,lim.\,x + \omega\,lim.\,y + \omega v$ mit ω und v zugleich unendlich klein wird, also $lim.\,x\,.\,lim.\,y$ als die Grenze des Productes xy erscheint.

Setzt man $y = A$, wobei A eine beständige Größe vorstellt, so hat man

$$lim.\,(Ax) = A\,lim.\,x.$$

Auf demselben Wege, welcher uns zu der obigen Gleichung führte, findet man für eine beliebige Anzahl veränderlicher Größen x, y, z ...

$$lim.\,(xyz\ldots) = lim.\,x\,.\,lim.\,y\,.\,lim.\,z\ldots$$

4) Es ist $lim. \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{lim. x}{lim. y}$; denn durch Division ergibt sich

$$\frac{x}{y} = \frac{lim. x + \omega}{lim. y + \upsilon} = \frac{lim. x}{lim. y} + \frac{\omega\, lim. y - \upsilon\, lim. x}{(lim. y + \upsilon)\, lim. y},$$

wobei der Bruch $\frac{\omega\, lim. y - \upsilon\, lim. x}{(lim. y + \upsilon)\, lim. y}$ unendlich klein werden kann, weil sein Zähler bei dem unendlichen Abnehmen von ω und υ unendlich klein wird, während der Nenner sich dem Quadrate von $lim. y$ ohne Ende nähert. Es gilt also die aufgestellte Formel.

5) Es ist, wenn m eine unveränderliche Zahl bedeutet,

$$lim. (x^m) = (lim. x)^m.$$

Diese Gleichung folgt für einen ganzen positiven Werth von m aus 3), weil man x^m unter dieser Voraussetzung in m Factoren, deren jeder $= x$ ist, zerlegen kann.

Läßt man m eine positive gebrochene Zahl $= \frac{p}{q}$ seyn, so ist, wenn man in der bereits erwiesenen Gleichung $x^{\frac{p}{q}}$ statt x, und q statt m setzt:

$$lim. (x^p) = [lim. (x^{\frac{p}{q}})]^q,$$

$$\text{folglich} \quad lim. (x^{\frac{p}{q}}) = [lim. (x^p)]^{\frac{1}{q}}.$$

Aber es ist $lim. (x^p) = (lim. x)^p$, daher

$$lim. (x^{\frac{p}{q}}) = (lim. x)^{\frac{p}{q}}.$$

Ist endlich m eine ganze oder eine gebrochene negative Zahl $= -n$, so hat man, weil der in der Frage stehende Satz bereits für positive Exponenten bewiesen ist,

$$\frac{1}{lim. (x^n)} = \frac{1}{(lim. x)^n} = (lim. x)^{-n}.$$

Aber andererseits ist

$$\frac{1}{lim. (x^n)} = \frac{lim. 1}{lim. (x^n)} = lim. \left(\frac{1}{x^n}\right) = lim. (x^{-n}),$$

$$\text{also} \quad lim. (x^{-n}) = (lim. x)^{-n}.$$

6) Wenn der Exponent ω der Potenz, zu welcher eine unveränderliche, von der Einheit verschiedene Größe a erhoben wird, unendlich abnimmt, so nähert sich diese Potenz ohne Ende der Grenze 1, oder es ist $lim. (a^\omega) = 1$.

Da nur $1^{\omega} = 1$ seyn kann, so lange ω, wie es hier dem Begriffe einer unendlich klein werdenden Größe gemäß vorausgesetzt wird, von o verschieden ist, so muß a^{ω} von der Einheit verschieden ausfallen. Man wird daher $a^{\omega} = 1 + v$ setzen, wobei v eine positive oder negative Zahl ist. Aber ω kann unter der Form $\frac{1}{\mu}$ vorgestellt werden, wenn μ eine unendlich wachsende Größe anzeigt, daher hat man

$$a^{\frac{1}{\mu}} = 1 + v, \text{ folglich}$$
$$a = (1 + v)^{\mu}.$$

Diese Gleichung widerspricht den am Anfange dieser Vorlesung in 7 und 8 bewiesenen Sätzen, wenn nicht v unendlich abnimmt, während μ unendlich wächst. Es ist also v eine mit ω zugleich unendlich abnehmende Größe, daher wegen $a^{\omega} = 1 + v$, $lim.\, a^{\omega} = 1$.

7) Es ist $lim.\,(a^x) = a^{lim.\,x}$.

Denn setzt man $x = lim.\,x + \omega$, so wird

$$a^x = a^{lim.\,x + \omega} = a^{lim.\,x} \,.\, a^{\omega} = a^{lim.\,x}(1 + v)$$
$$= a^{lim.\,x} + v\,a^{lim.\,x},$$

woraus die behauptete Gleichung von selbst folgt.

8) Sind x und y zugleich veränderlich, so ist

$$lim.\,(x^y) = (lim.\,x)^{lim.\,y}.$$

Denn setzt man $x = lim.\,x + \omega$, $y = lim.\,y + v$, so wird

$$lim.\,(x^y) = lim.\,(x^{lim.\,y} \,.\, x^v) = lim.\,(x^{lim.\,y}) \,.\, lim.\,(x^v)$$
$$= (lim.\,x)^{lim.\,y} \,.\, lim.\,(lim.\,x + \omega)^v,$$

wobei sich, wie in 6), zeigen läßt, daß

$lim.\,(lim.\,x + \omega)^v = 1$ ist; es gilt daher die behauptete Gleichung.

Dritte Vorlesung.

Über die Reihen.

Eine Folge von Größen, welche hinsichtlich ihres arithmetischen Baues nach einem gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe. Als Beispiele dienen die aus der Arithmetik bekannten Progressionen. Jede einzelne dieser Größen wird ein Glied der Reihe genannt.

Die Stellen, welche die Glieder einer Reihe einnehmen, werden mit den in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgenden ganzen Zahlen bezeichnet, welche man die Zeiger der zugehörigen Glieder nennt. Man ertheilt irgend einem Gliede den Zeiger 1, und da man von diesem Gliede zu den Nachbargliedern nach zwei entgegengesetzten Richtungen übergehen kann, so erhalten die nächsten Glieder in der einen Richtung nach der Ordnung die Zeiger 2, 3, 4, 5 u. s. w., und in der andern die Zeiger 0, —1, —2, —3, —4 u. s. w. Von zwei Gliedern, deren Zeiger p, q mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen, eine positive Differenz $p - q$ geben, heißt jenes, dem der Minuend p gehört, das spätere, und das andere das frühere Glied. Wenn man bloß eine begrenzte Anzahl von Gliedern einer Reihe betrachtet, oder dieselbe nur eine begrenzte Anzahl von Gliedern zuläßt, so pflegt man dem Anfangsgliede, der leichteren Übersicht wegen, den Zeiger 1 beizulegen, jedoch kann dasselbe auch jeden andern Zeiger führen.

Es ist sehr zweckmäßig, die Glieder einer Reihe sämmtlich durch denselben Buchstaben vorzustellen, welchem man, der Unterscheidung wegen, die Zeiger dieser Glieder rechts unten anhängt. Auf diese Art bezeichnet der Inbegriff der Symbole

$$\ldots\ldots u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots\ldots$$

jede beliebige Reihe, welche man nach beiden Richtungen, so weit man will, fortsetzen kann.

Zwischen je zwei Glieder einer Reihe eine festgesetzte Anzahl neuer Glieder so einschalten, daß sie sich an die bereits vorhandenen zu einer nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildeten Reihe anschließen, heißt die Reihe interpoliren. Die interpolirten Glieder erhalten sehr

schicklich gebrochene Zeiger. Kommen nämlich zwischen die Glieder u_n und u_{n+1}, $r-1$ neue Glieder, so werden diese durch die Zeichen

$$u_{n+\frac{1}{r}},\ u_{n+\frac{2}{r}},\ u_{n+\frac{3}{r}},\ u_{n+\frac{4}{r}} \ldots u_{n+\frac{r-1}{r}}$$

angedeutet, an welche sich die Zeichen u_n und u_{n+1}, wegen

$$u_n = u_{n+\frac{0}{r}} \text{ und } u_{n+1} = u_{n+\frac{r}{r}}$$

sehr gut anreihen *).

Das Gesetz, welches einer Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \ldots u_n,\ u_{n+1} \ldots$$

zum Grunde liegt, kann auf zweifache Art dargestellt werden. Entweder wird jedes Glied der Reihe, wie u_n durch die ihm vorangehenden Glieder u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3} .... ausgedrückt; oder es ist u_n lediglich als eine Function des entsprechenden Zeigers n gegeben. In beiden Fällen heißt der für u_n vorhandene Ausdruck das allgemeine Glied der Reihe; nur sagt man im ersten Falle, es werde durch eine Recursion, und im zweiten, es werde independent dargestellt. Die recurrirende Form des allgemeinen Gliedes verstattet kein Glied der Reihe außer der Ordnung, d. h. ehe alle vorhergehenden Glieder bekannt sind, zu berechnen; die independente Form hingegen bietet jedes beliebige Glied der Reihe außer der Ordnung dar. Zur Darstellung der gesammten Reihe mittelst der ersten Form müssen so viele der An-

---

*) Die Exponenten der Potenzen einer und derselben Wurzel a können als die Zeiger der Stellen betrachtet werden, welche diese Potenzen in der geometrischen Progression

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \ldots a^n,\ a^{n+1} \ldots$$

einnehmen. Schreitet man in derselben rückwärts, indem man jedes bereits gefundene Glied durch a theilt, so erhält man die Glieder

$$1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3} \ldots \frac{1}{a^n} \ldots,$$

welchen demnach die Zeiger

$$0,\ -1,\ -2,\ -3 \ldots -n \ldots \text{ gehören.}$$

Die Wurzelgröße $\sqrt[r]{a^n}$ ist ferner das $n$te Glied der Reihe, welche aus der angeführten Progression entsteht, wenn zwischen je zwei Glieder derselben $r-1$ Glieder interpolirt werden, was die Bezeichnung dieser Wurzelgröße durch $a^{\frac{n}{r}}$ rechtfertiget.

fangsglieder abgesondert gegeben werden, als die Recursion überhaupt Glieder in Anspruch nimmt; dagegen enthält die andere Form eine gewisse Anzahl willkürlicher beständiger Größen, welche in der ersten nicht vorkommen und die Stelle der abgesondert zu gebenden Anfangsglieder der Reihe vertreten. So ist z. B. für die geometrische Progression, deren Anfangsglied = a, und deren Quotient = q gesetzt wird, $u_n = u_{n-1} q$ die recurrirende, und $u_n = a q^{n-1}$ die independente Form des allgemeinen Gliedes. Letztere enthält die Constante a, welche in der ersteren nicht erscheint.

Aus der independenten Form des allgemeinen Gliedes einer Reihe kann immer die recurrirende abgeleitet werden, wenn man den allgemeinen Zeiger nach und nach um 1, 2, 3 . . . vermindert, und die dadurch erhaltenen Gleichungen durch Wegschaffung der darin befindlichen willkürlichen beständigen Größen in eine zusammenzieht. So gibt z. B. die Gleichung $u_n = a q^{n-1}$, wenn man $n-1$ statt n setzt, $u_{n-1} = a q^{n-2}$; daher ist

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q \quad \text{und} \quad u_n = u_{n-1}\, q, \text{ wie oben.}$$

Die Auffindung der independenten Form aus der recurrirenden erfordert aber eigenthümliche Methoden.

In der Analysis kommen manchmal Reihen vor, deren einzelne Glieder selbst wieder Reihen sind. Man nennt sie Doppelreihen. Die Tabelle, welche man in der Arithmetik für das Ein mal Eins unter dem Namen der Pythagorischen Tafel zu entwerfen pflegt, stellt eine Doppelreihe dar.

Zur Bezeichnung aller Glieder einer Doppelreihe ist ebenfalls ein Buchstabe hinreichend, nur muß man ihm zwei Zeiger beilegen, wovon der eine auf die Stellung jedes einzelnen Gliedes in einer Partial-Reihe, und der andere auf die Position dieser Partial-Reihe unter den übrigen sich bezieht, wie folgendes Schema nachweiset.

$$\begin{array}{l}
u_{0,0},\ u_{0,1},\ u_{0,2},\ u_{0,3} \ \ldots\ldots\ u_{0,n} \ \ldots\ldots \\
u_{1,0},\ u_{1,1},\ u_{1,2},\ u_{1,3} \ \ldots\ldots\ u_{1,n} \ \ldots\ldots \\
u_{2,0},\ u_{2,1},\ u_{2,2},\ u_{2,3} \ \ldots\ldots\ u_{2,n} \ \ldots\ldots \\
u_{3,0},\ u_{3,1},\ u_{3,2},\ u_{3,3} \ \ldots\ldots\ u_{3,n} \ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{m,0},\ u_{m,1},\ u_{m,2},\ u_{m,3} \ \ldots\ldots\ u_{m,n} \ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Es ist hier gleichgültig, ob man die horizontalen oder die verticalen Zeilen als die Partial-Reihen betrachtet, aus welchen die Doppelreihe besteht; nur muß man die Bedeutung des vorangehenden und nachfolgenden Zeigers in dem Zeichen jedes Gliedes gehörig festsetzen, und in dieser Beziehung $u_{m,n}$ von $u_{n,m}$ unterscheiden.

Das allgemeine Glied einer Doppelreihe, nämlich $u_{m,n}$, wird entweder durch eine Recursion auf

$$u_{m,n-1},\ u_{m,n-2},\ u_{m,n-3}\ \ldots\ldots\ u_{m-1,n},\ u_{m-1,n-1},\ u_{m-1,n-2}\ \ldots\ldots,$$

oder independent, durch m und n ausgedrückt. Immer aber ist zur Construction einer individuellen Doppelreihe die Angabe einiger der ersten Partial-Reihen erforderlich.

Eine Reihe, deren Glieder Doppelreihen sind, heißt eine dreifache Reihe. Die Bezeichnung ihrer Glieder erheischt drei Zeiger, und hat nach dem bereits Erklärten keine Schwierigkeit.

Man wird nun auch leicht einsehen, was unter einer vierfachen und allgemein unter einer rfachen Reihe zu verstehen sey.

Eine Function des unbestimmten Zeigers n, sie heiße S_n, welche die Summe einer sich mit dem Gliede u_n endigenden Folge von Gliedern der Reihe

$$u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ldots\ u_n\ \ldots\ldots$$

angibt, heißt die Summenformel oder das Summenglied dieser Reihe. Soll die Gliederfolge, deren Summe S_n ist, mit dem Gliede u_k anfangen, d. h. soll

$$S_n = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots\ldots + u_n$$

seyn, so muß S_n gleich Null werden, wenn man $n = k - 1$ setzt. Denn es ist offenbar

$$S_{n-1} = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots\ldots + u_{n-1},$$

folglich (1) $S_n - S_{n-1} = u_n$

und (2) $S_{n-1} = S_n - u_n$.

Für $n = k$ reducirt sich die ganze Summe auf das erste Glied u_k, daher ist $S_k = u_k$, also vermög (2)

$$S_{k-1} = S_k - u_k = 0.$$

Die Gleichung (2) gibt, wenn man in derselben

$n = k - 1,\ k - 2,\ k - 3\ \ldots\ldots$ setzt:

$$S_{k-2} = S_{k-1} - u_{k-1} = -u_{k-1}$$
$$S_{k-3} = S_{k-2} - u_{k-2} = -(u_{k-1} + u_{k-2})$$
$$S_{k-4} = S_{k-3} - u_{k-3} = -(u_{k-1} + u_{k-2} + u_{k-3})$$
u. s. w.

Wenn man also in der Summenformel S_n, statt n, $k - h$ setzt, so erhält man die Summe der $h - 1$ Glieder, welche dem Gliede u_k in der obigen Reihe vorangehen, mit entgegengesetztem Zeichen.

Alles hier Gesagte läßt sich durch die bekannten Summenformeln der arithmetischen und geometrischen Progressionen leicht anschaulich machen.

Die Gleichung (1) zeigt, daß sich aus der Summenformel einer Reihe ihr allgemeines Glied immer mittelst einer einfachen Rechnung darstellen läßt. Die Bestimmung der Summenformel aus dem allgemeinen Gliede hingegen, ist oft mit großen Schwierigkeiten verbunden. Man nennt die Auflösung dieses Problems die Summirung der Reihen.

Wenn die Summe einer Reihe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

so beschaffen ist, daß sie sich bei dem unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze G ohne Ende nähert, so kann man G als die Summe der unendlichen Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 +$ 2c. betrachten, und $G = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 +$ 2c. setzen. Man wird sich nämlich bei dem Zusammenzählen der Glieder dieser Reihe, der Größe G um so mehr nähern, je mehr Glieder man in Anspruch nimmt, so daß der Fehler, welchen man begeht, indem man G für die Summe einer gewissen Anzahl der Glieder der Reihe gelten läßt, durch Addition hinreichend vieler Glieder kleiner gemacht werden kann, als jede denkbare noch so kleine Größe.

Man sagt in diesem Falle, die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{2c.}$$

sey summirbar, oder sie convergire, und schätzt die Schnelligkeit der Convergenz nach der Genauigkeit, mit welcher sich die Grenze G durch Addition weniger Glieder der Reihe darstellen läßt*).

*) Als Beispiele convergirender Reihen können die aus der Arithmetik bekannten unendlich fortlaufenden Decimalbrüche angeführt werden, mittelst welcher man Brüche, deren Nenner andere Factoren als 2 und 5 enthalten, wie auch Wurzeln unvollständiger Potenzen näherungsweise anzugeben pflegt.

Man sieht in der Analysis eine unbekannte Größe als berechnet an, wenn man im Stande ist, dieselbe durch eine convergirende Reihe darzustellen.

Ist hingegen die Summe einer Reihe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

bei dem unendlichen Wachsen von n keiner bestimmten Grenze fähig, d. h. wird sie dabei selbst unendlich groß, oder schwankt sie zwischen mehreren Werthen, so divergirt die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ rc.},$$

und ist nicht summirbar, also auch unfähig irgend eine Größe auszudrücken.

Die Beantwortung der Frage, ob eine vorgelegte unendliche Reihe convergire oder divergire, ist von der größten Wichtigkeit. Wir wollen ihr die nächsten Vorlesungen widmen.

Vierte Vorlesung.

Über die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

Ein allgemeines Kennzeichen der Convergenz einer unendlichen Reihe folgt unmittelbar aus der in der vorhergehenden Vorlesung gegebenen Erklärung dieser Eigenschaft. Soll eine unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \text{ic.}$$

convergiren, so muß sich die Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

bei dem unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze G nähern; allein nur selten kann man über die Existenz einer solchen Grenze durch die Betrachtung der Summe einer endlichen Anzahl der Glieder der vorgelegten Reihe entscheiden. Einen Fall, in welchem dieß angeht, bietet die geometrische Progression

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + aq^{n+1} + \text{ic.}$$

dar. Summirt man die n ersten Glieder derselben nach der bekannten Formel, so findet man:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

welche Summe auch unter den Formen

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

$$\text{und} \quad S_n = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}$$

vorgestellt werden kann, wovon die erste auf $q < 1$, und die zweite auf $q > 1$ sich bezieht.

Ist die positive oder negative Zahl $q < 1$, so nimmt $\frac{aq^n}{1-q}$ unendlich ab, wenn n unendlich wächst, daher nähert sich S_n dabei ohne Ende der Grenze $\frac{a}{1-q}$, d. h. eine geometrische, in das Unendliche fortlaufende Progression, deren Quotient numerisch betrachtet kleiner ist als die Einheit, convergirt, und man findet ihre Summe, wenn man ihr

erstes Glied durch den Überschuß der Einheit über ihren Quotienten theilt.

Übersteigt q die Einheit im positiven oder im negativen Sinne, so wird $\frac{aq^n}{q-1}$ mit n zugleich unendlich groß; aber $\frac{a}{q-1}$ ist unveränderlich, folglich wird auch S_n unendlich groß, und die geometrische Progression divergirt.

Setzt man $q=+1$, so bietet die Formel $S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ dar; da aber in diesem Falle die geometrische Progression aus unendlich vielen Gliedern besteht, deren jedes $=a$ ist, so divergirt sie offenbar.

Läßt man $q=-1$ seyn, so geht die Progression in

$$a - a + a - a + a - a + \text{ꝛc.}$$

über, welche wegen des Schwankens ihrer Summe zwischen 0 und a als divergirend anzusehen ist. Eine unendliche geometrische Progression, deren Quotient nicht kleiner ist als die Einheit, gehört demnach zu den divergirenden Reihen.

Ist $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{ꝛc.}$ eine convergirende Reihe, und setzt man

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$$
$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \text{ꝛc.} = Q_n,$$

wobei also $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{ꝛc.} = S_n + Q_n$ ist, so muß, wenn man der Zahl n irgend einen fixen Werth beilegt, die durch Q_n vorgestellte unendliche Reihe ebenfalls convergiren; und zwar muß, wenn man die Summe der ganzen unendlichen Reihe G nennt, die Summe der letzteren $=G-S_n$ seyn.

Läßt man n nach und nach wachsen, so wird, wenigstens nachdem dieser Zeiger einen gewissen Werth k überschritten hat, die Differenz $G-S_n$ anfangen ununterbrochen fort'abzunehmen, und wenn n alle Grenzen übersteigt, kleiner werden, als jede angebbare noch so kleine Zahl. Das Glied u_k, welches dem erwähnten Zeigerwerthe k entspricht, ist dasjenige, bei welchem die Convergenz der Reihe beginnt.

Man sieht aus dem Gesagten, daß die Größe, welche wir durch Q_n vorgestellt haben, und welche man die dem Zeiger n zugehörige Ergänzung der gegebenen unendlichen Reihe nennen kann, bei dem unendlichen Wachsen von n, wenn anders die Reihe convergiren soll, unendlich klein werden muß. Es läßt sich daher die Bedingung der

Convergenz einer unendlichen Reihe auch so ausdrücken: **die Summe ihrer spätesten Glieder muß unendlich klein werden.**

Wenn bei dem unendlichen Wachsen von n die Größe S_n sich der Grenze G unendlich nähert, und die Anzahl der bereits zusammengenommenen Glieder der Reihe sehr groß geworden ist, so kann das Hinzukommen eines der noch fehlenden Glieder, z. B. u_{n+1}, zu S_n diese Summe nur wenig ändern. Es müssen also die vom Anfange einer convergirenden Reihe unendlich weit abstehenden Glieder unendlich klein werden, d. h. es muß im Falle der Convergenz einer Reihe der allgemeine Ausdruck u_n eines jeden ihrer Glieder unendlich abnehmen, wenn der Zeiger n unendlich wächst.

Obschon der Mangel dieser Eigenschaft, welche man das **Fallen** der Reihe zu nennen pflegt, ein sicheres Zeichen ihrer Divergenz ist, so führt doch die Anwesenheit derselben die Convergenz der Reihe nicht nothwendig herbei. Denn die Ergänzung einer Reihe kann unendlich wachsen, wenn sie auch aus unendlich abnehmenden Gliedern besteht.

Um hievon ein Beispiel zu geben, betrachten wir die sogenannte natürliche harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \text{ꝛc.},$$

deren Glieder offenbar unendlich abnehmen. Behält Q_n die oben angenommene Bedeutung bei, so ist

$$Q_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \text{ꝛc.};$$

also, wie groß auch immer n seyn mag:

$$Q_n > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n};$$

folglich, wenn man die Nenner aller Glieder auf 2n erhöht, um so mehr

$$Q_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{oder} \quad Q_n > n \cdot \frac{1}{2n}, \text{ d. h. } Q_n > \frac{1}{2}.$$

Es kann also Q_n nicht kleiner werden, als jede beliebige noch so kleine Größe, woraus die Divergenz der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ꝛc. erhellet.}$$

Indessen, wenn die Zeichen der Glieder einer unendlichen Reihe, wenigstens von einer gewissen Stelle angefangen, regelmäßig wechseln, so daß immer gleich viel positive und eben so viele negative Glieder gruppenweise beisammen stehen, so ist die unendliche Abnahme der Glieder ein sicheres Zeichen der Convergenz der Reihe.

Betrachten wir nur die Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \pm u_{n+2} \mp \text{ꝛc.},$$

so ist für sie

$$Q_n = \mp [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots]$$

und $Q_n = \mp [u_{n+1} - u_{n+2} + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots\ldots]$.

Nehmen die Glieder u_{n+2}, u_{n+3}, u_{n+4} .... fortwährend ab, so sind alle durch Klammern begrenzte Differenzen in diesen Gleichungen positiv, folglich fällt der numerische Werth von Q_n stets zwischen die Zahlen u_{n+1} und $u_{n+1} - u_{n+2}$; wird nun u_{n+1} unendlich klein, während n unendlich wächst, so nimmt auch Q_n unendlich ab, daher ist die vorgelegte Reihe eine convergirende.

Eben so wird der aufgestellte Satz bewiesen, wenn mehrere positive oder negative Glieder unmittelbar auf einander folgen.

Es ist also oft eine bloße Änderung der Zeichen hinreichend, um eine divergirende Reihe in eine convergirende zu verwandeln. Die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{ꝛc.}$$

divergirt, während die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{ꝛc. convergirt.}$$

Hat man über die Convergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe zu urtheilen, so gelangt man am leichtesten zum Ziele, wenn man dieselbe mit andern, bereits als convergirend oder divergirend anerkannten Reihen vergleicht, indem man sich der folgenden aus der Natur der Convergenz und Divergenz abgeleiteten Sätze bedient.

Eine Reihe, deren Glieder von einer gewissen Stelle angefangen, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, sämmtlich kleiner sind, als die correspondirenden, bloß mit gleichen Zeichen versehenen Glieder einer convergirenden Reihe, convergirt ebenfalls; und eine Reihe, deren Glieder von einer gewissen Stelle angefangen, einerlei Zeichen haben und in Bezug auf die numerischen Werthe die Glieder einer divergirenden Reihe übertreffen, divergirt. Denn die Ergänzung einer unendlichen Reihe wird vermindert, wenn die numerischen Werthe der ihr zugehörigen Glieder abnehmen, oder eine Störung der früher vorhandenen

Übereinstimmung der Zeichen eintritt; hingegen wächst diese Ergänzung, wenn die numerischen Werthe ihrer Glieder zunehmen, und die früher nicht vorhandene Gleichheit der Zeichen hergestellt wird. Die ersteren Änderungen befördern die Convergenz, und die letzteren befördern die Divergenz der Reihe.

Da Reihen, in welchen die Zeichen der Glieder unregelmäßig wechseln, wohl selten vorkommen dürften, und bei dem regelmäßigen Zeichenwechsel die bloße unendliche Abnahme der Glieder die Convergenz der Reihe außer Zweifel setzt, so wollen wir hier nur solche Reihen betrachten, deren Glieder mit gleichen Zeichen versehen sind. Die Vergleichung dieser Reihen mit einer geometrischen Progression, mit der harmonischen Reihe u. d. gl. führt auf allgemeine Sätze über Convergenz und Divergenz, wovon die folgenden von *Cauchy* im Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique 1.re partie Chap. VI vorgetragenen, für viele Fälle hinreichen.

1) Wenn bei einer Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n, u_{n+1} \ldots\ldots$$

der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sich einer bestimmten Grenze A um so mehr nähert, je größer n wird, so convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem A kleiner oder größer ist als die Einheit.

Denn aus der Voraussetzung $lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = A$ folgt, daß wenn die Größe B noch so nahe an A angenommen wird, dennoch der numerische Werth der Differenz $\frac{u_{n+1}}{u_n} - A$, sobald n eine hinreichend große Zahl r überschreitet, fortwährend kleiner ausfällt, als jener der Differenz B — A, und daher fortwährend $\frac{u_{n+1}}{u_n} <$ oder $> B$, d. h. $u_{n+1} <$ oder $> B u_n$ bleibt, je nachdem B $>$ oder $<$ A ist. Im ersten Falle werden die Glieder der Reihe

$$(1) \qquad u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3} \ldots\ldots$$

sämmtlich kleiner, und im zweiten sämmtlich größer, als die correspondirenden Glieder der geometrischen Progression

$$(2) \qquad u_r, Bu_r, B^2u_r, B^3u_r \ldots\ldots$$

Ist nun A von der Einheit verschieden, und gibt man der Größe B einen zwischen 1 und A liegenden Werth, so hat man B $>$ oder $<$ A,

je nachdem $A <$ oder > 1 gedacht wird; aber im ersten Falle ist auch $B < 1$, also die Progression (2) eine convergirende, und im zweiten ist $B > 1$, also die Progression (2) eine divergirende, daher convergirt auch die Reihe (1), wenn $A < 1$, und sie divergirt, wenn $A > 1$ ist.

Die Bedingung $lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = A$ kann noch auf eine andere Art ausgedrückt werden. Es sey ω_n eine positive oder negative von n abhängende, und bei dem unendlichen Wachsen dieser Zahl unendlich abnehmende Größe, so besteht die Gleichung

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = A + \omega_n.$$

Aus derselben folgt, wenn man nach und nach r, $r+1$, $r+2$, $r+3 \ldots n-1$ statt n setzt, und die erhaltenen Resultate mit einander multiplicirt:

$$\frac{u_n}{u_r} = (A + \omega_r)(A + \omega_{r+1})(A + \omega_{r+2}) \ldots (A + \omega_{n-1}).$$

Läßt man hier r und n zugleich so ins Unendliche wachsen, daß die Differenz $n - r$ unverändert bleibt, so findet man (zweite Vorlesung II., 3):

$$lim. \frac{u_n}{u_r} = A^{n-r}$$

$$\text{oder } \frac{u_n}{u_r} = (A + v)^{n-r},$$

wobei v eine bei dem unendlichen Wachsen von n und r unendlich klein werdende Größe anzeigt. Man hat also auch

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_r} \cdot (A + v)^{1-\frac{r}{n}}.$$

Wächst nun n unendlich, während r constant ist, so wird wegen $lim. \sqrt[n]{u_r} = lim. u_r^{\frac{1}{n}} = 1$, und wegen der unendlichen Abnahme von $\frac{r}{n}$ und v:

$$lim. \sqrt[n]{u_n} = A = lim. \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Man kann daher auch sagen, eine Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, u_{n+1} \ldots,$$

bei welcher sich $\sqrt[n]{u_n}$, indem n unendlich wächst, einer bestimmten Grenze nähert, convergirt oder divergirt, je nachdem diese Grenze kleiner oder größer als 1 ist.

Fünfte Vorlesung.

Über die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

(Fortsetzung.)

Die in der vorhergehenden Vorlesung nachgewiesenen Kennzeichen der Convergenz und Divergenz einer Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ldots\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots\ldots$$

reichen für den Fall nicht aus, wenn die Grenze, welcher sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ oder die Wurzelgröße $\sqrt[n]{u_n}$ bei dem unendlichen Wachsen von n ohne Ende nähert, der Einheit gleich kommt. Man bedarf dann neuer Hülfsmittel, wovon folgende Sätze eine Probe geben.

2). Wenn die Glieder der Reihe

$$(1)\qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots\ldots\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots\ldots$$

unendlich abnehmen, so convergirt oder divergirt dieselbe zugleich mit der Reihe

$$(2)\qquad u_1,\ 2u_2,\ 4u_4,\ 8u_8\ \ldots\ldots\ 2^n u_{2^n}\ \ldots\ldots$$

Aus der Abnahme der Glieder der Reihe (1) folgt

$u_1 = u_1$	$u_1 = u_1$
$2u_2 = 2u_2$	$2u_2 > u_2 + u_3$
$4u_4 < 2u_3 + 2u_4$	$4u_4 > u_4 + u_5 + u_6 + u_7$
$8u_8 < 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8$	$8u_8 > u_8 + u_9 + \ldots\ldots + u_{15}$
u. s. w.	u. s. w.

Setzt man die Summe der n ersten Glieder der Reihe (1) $= S_n$, und dieselbe Summe für die Reihe (2) $= T_n$, so hat man durch Addition der obigen Sätze, wenn man der Kürze wegen 2^{n-1} durch m vorstellt,

$$T_n < 2S_m - u_1 \quad \text{und} \quad T_n > S_{2m-1}.$$

Hieraus läßt sich nun ohne Mühe folgern, daß bei dem unendlichen Wachsen von n, S_n und T_n entweder zugleich unendlich groß werden, oder zugleich festgesetzten Grenzen sich nähern, wodurch der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

So sind z. B. die Reihen

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots + \frac{1}{n^r} + \ldots$$

und $1 + 2^{1-r} + 4^{1-r} + 8^{1-r} + \ldots + 2^{n(1-r)} + \ldots$

zugleich convergirende oder divergirende. Die letztere ist eine geometrische Progression, deren Convergenz an die Erfüllung der Bedingung $r > 1$ gebunden ist; daher convergirt auch die erstere Reihe nur dann, wenn r die Einheit übersteigt. Für $r = 1$ verwandelt sich die erste Reihe in die natürliche harmonische $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$; wir haben also hiedurch einen neuen Beweis ihrer Divergenz.

3) Da uns nun die Fälle bekannt sind, in welchen die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots$$

convergirt oder divergirt, so können wir uns derselben zur Beurtheilung des Verhaltens anderer Reihen bedienen.

Nähert sich nämlich das allgemeine Glied u_n einer Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, u_{n+1} \ldots$$

bei dem unendlichen Wachsen von n ohne Ende der Größe $\frac{1}{n^a}$, so convergirt oder divergirt diese Reihe, je nachdem der unveränderliche Exponent $a >$ oder $<$ als 1 ist. Der Beweis dieses Satzes ist dem in 1) gegebenen ähnlich.

Die Bedingung $lim.\ u_n = lim.\ \frac{1}{n^a}$ kann wegen der daraus folgenden Gleichung

$$lim.\ log.\ u_n = a\ lim.\ log.\ \frac{1}{n},$$

in welcher die Logarithmen aus jedem beliebigen Systeme genommen werden dürfen, auch die Form

$$lim. \left(\frac{log.\ u_n}{log.\ \frac{1}{n}} \right) = a$$

erhalten.

4) Wir haben uns bis jetzt mit der Untersuchung der Convergenz oder Divergenz solcher unendlicher Reihen beschäftiget, deren Glieder aus völlig bestimmten Größen gebildet werden; betrachten wir gegenwärtig Reihen, welche nach den steigenden, mit ganzen positiven Exponenten versehenen Potenzen einer veränderlichen Größe x in das Unendliche fortschreiten, und deren allgemeine Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \text{etc.}$$

ist, wobei die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ beständige, für sich selbst eine Reihe darstellende, positive oder negative Größen anzeigen.

In Bezug auf die vorgelegte Reihe kann nur gefragt werden, für welche Werthe von x sie convergire, und für welche sie divergire.

Geht diese Reihe, nachdem x einen speciellen Werth erhalten hat, in

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \text{ꝛc.}$$

über, und nähert sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei dem unendlichen Wachsen von n ohne Ende der Grenze A, so convergirt oder divergirt dieselbe, je nachdem $A < 1$ oder $A > 1$ ist.

Nun findet man für den erwähnten Werth von x

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\, x, \text{ folglich}$$

$$lim.\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = x\, lim.\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = A, \text{ also wenn man}$$

$$lim.\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \text{ setzt, } A = \alpha x,$$

so daß es in Betreff der Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

nur darauf ankommt, ob der besondere Werth, welcher der veränderlichen Größe x beigelegt wurde, so beschaffen ist, daß für denselben $\alpha x < 1$ oder $\alpha x > 1$ ausfällt.

Gibt es also für den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bei dem unendlichen Wachsen von n eine Grenze α, so convergirt diese Reihe für alle Werthe von x, welche numerisch betrachtet kleiner sind, als $\frac{1}{\alpha}$, d. h. zwischen die Grenzen $-\frac{1}{\alpha}$ und $+\frac{1}{\alpha}$ fallen; und sie divergirt für alle Werthe von x, welche numerisch betrachtet $\frac{1}{\alpha}$ übersteigen, oder außerhalb der genannten Grenzen liegen.

Das Verhalten der Reihe bei den Substitutionen $x = -\frac{1}{\alpha}$ und $x = +\frac{1}{\alpha}$ selbst, muß nach den früher ertheilten Vorschriften besonders untersucht werden.

Übrigens ist leicht einzusehen, daß wenn eine Reihe von der obigen Form für einen Werth von x, z. B. $x = \mu$ convergirt, sie

für alle positiven und negativen Werthe von x, welche, ohne auf das Zeichen Rücksicht zu nehmen, kleiner als μ sind, convergiren müsse.

5) Wenn zwei Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \ldots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n \ldots$$

für einen bestimmten Werth von x convergiren, so ist auch ihre Summe oder Differenz eine für denselben Werth von x convergirende Reihe.

Denn es sey

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$
$$T_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

und bei dem unendlichen Wachsen von n

$$lim.\ S_n = A \quad \text{und} \quad lim.\ T_n = B,$$

wobei also A und B die Summen der obigen Reihen für den erwähnten besonderen Werth von x anzeigen; so ist

$$lim.\ (S_n \pm T_n) = lim.\ S_n \pm lim.\ T_n = A \pm B.$$

Da nun $S_n \pm T_n$ bei dem unendlichen Wachsen von n an die Grenze $A \pm B$ gebunden erscheint, so ist der aufgestellte Satz bewiesen.

6) Wenn die in 5) betrachteten Reihen für einen bestimmten Werth von x convergiren, welcher allen Gliedern derselben gleiche Zeichen ertheilt, und A, B ihre Summen anzeigen, so convergirt das Product dieser Reihen für denselben Werth von x, und seine Summe ist $= AB$.

Setzen wir die Summe der $n+1$ ersten Glieder des Productes, jener Glieder nämlich, welche die Potenzen $x^0, x^1, x^2 \ldots x^n$ enthalten, $= P_n$, so ist offenbar $P_n < S_n T_n$, wobei S_n und T_n die in 6) gebrauchte Bedeutung haben. Denn das Product $S_n T_n$ liefert auch zu jenen Gliedern des Productes der vorgelegten Reihen, in welchen $x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3} \ldots x^{2n}$ erscheinen, einige Bestandtheile. Ferner ist, wenn m die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl vorstellt, $P_n > S_m T_m$. Denn P_n enthält Bestandtheile, welche durch die Multiplication der Polynome S_m und T_m nicht erzeugt werden. Es liefert nämlich das Product $S_m T_m$ zu jenem Gliede von P_n, worin x^n als Factor steht, höchstens einen Bestandtheil, $a_m b_m x^{2m}$, und diesen nur in dem Falle, wenn n eine gerade Zahl ist.

Bei dem unendlichen Wachsen von n, und folglich auch von m, nähern sich die Summen S_n, S_m, wie auch T_n, T_m, der Voraus-

setzung gemäß, bestimmten Grenzen, welche wir in 6) durch A und B bezeichnet haben; daher nähern sich die Producte $S_n T_n$ und $S_m T_m$ gemeinschaftlich der Grenze AB. Aber P_n ist dabei stets zwischen $S_n T_n$ und $S_m T_m$ enthalten, folglich ist ebenfalls $\lim. P_n = AB$.

Sind bei dem angenommenen Werthe von x die Zeichen der Glieder in den Reihen 5) nicht durchgehends gleich, so kann man nicht allgemein sagen, P_n liege zwischen $S_n T_n$ und $S_m T_m$; denn die Glieder, welche in P_n fehlen, könnten in $S_n T_n$ eine subtractive Summe geben, und dann wäre $P_n > S_n T_n$, ohne daß deßwegen gerade $P_n < S_m T_m$ seyn müßte. Es gilt daher der so eben bewiesene Satz nicht allgemein, wenn sich nach der vorausgesetzten Substitution eines besonderen Werthes statt x, in den erwähnten Reihen nicht völlig übereinstimmende Zeichen befinden.

Haben aber die Resultate, welche diese Reihen für ein specielles x darbieten, eine solche Beschaffenheit, daß sie auch, nachdem alle Zeichen in Übereinstimmung gebracht worden sind, ihre Convergenz nicht verlieren, so ist ihr Product eine convergirende Reihe; denn es würde convergiren, wenn in den Factoren desselben durchgehends gleiche Zeichen vorhanden wären, daher convergirt es um so mehr, wenn diese Zeichen nicht übereinstimmen.

7) Multiplicirt man eine unendliche, nach den steigenden Potenzen der veränderlichen Größe x geordnete Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

welche für irgend einen bestimmten Werth von x convergirt, mit einem begrenzten, ebenfalls nach den Potenzen von x geordneten Polynome

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_m x^m,$$

so erhält man eine für denselben Werth von x convergirende Reihe zum Producte. Denn es convergirt jedes der Partialproducte, welche sich ergeben, wenn die Reihe mit jedem einzelnen Theile des Polynoms multiplicirt wird, folglich auch die Summe aller Partialproducte, d. h. das Product der Reihe mit dem ganzen Polynome.

8) Wenn in der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \text{rc.}$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für keinen Werth von n eine endliche Größe A zu überschreiten vermag, so ist bei dem unendlichen Abnehmen von x

$$\lim. (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \textit{in inf.}) = a_0.$$

Denn unter obiger Voraussetzung ist

a_2 nicht $> A a_1$, a_3 nicht $> A a_2$, a_4 nicht $> A a_3 \ldots$,

folglich auch

a_3 nicht $> A^2 a_1$, a_4 nicht $> A^3 a_1 \ldots\ldots$,

und also auch

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ nicht } > a_1 x (1 + Ax + A^2 x^2 + \ldots),$$

d. h. $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ nicht $> a_1 x \frac{1}{1 - Ax}$,

wenn nämlich $x < \frac{1}{A}$ angenommen wird, damit die geometrische Progression $1 + Ax + A^2 x^2 + A^3 x^3 + \ldots\ldots$ convergirt.

Aber $\frac{a_1 x}{1 - Ax}$ nimmt mit x zugleich unendlich ab, folglich auch

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

daher gilt die oben aufgestellte Gleichung.

9) Ist für alle unter einer gewissen Grenze stehenden Werthe von x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

so hat man $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ u. s. w. Denn die Grenzen beider Theile dieser Gleichung für das unendliche Abnehmen von x sind gleich, daher ist $a_0 = b_0$, folglich auch

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

und $a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots$,

worauf wieder derselbe Schluß paßt, u. s. w.

Sechste Vorlesung.

Über die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

(Fortsetzung.)

Gauß hat in den Commentat. soc. reg. scient. *Gottingensis* recentior. vol. II. in der Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Sect. 3. höchst wichtige Sätze über das Steigen und Fallen, und über die Convergenz und Divergenz der Reihen vorgetragen, mit deren Auseinandersetzung wir uns in gegenwärtiger Vorlesung beschäftigen werden.

Nehmen wir an, es sey die unendliche Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ldots\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots\ldots$$

so gebildet, daß der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^h+A_1 n^{h-1}+A_2 n^{h-2}+\ldots+A_h}{n^h+a_1 n^{h-1}+a_2 n^{h-2}+\ldots+a_h}$$

ist, wobei die Coefficienten $A_1,\ A_2,\ A_3\ \ldots\ldots\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots$ von n nicht abhängen, und setzen wir der Kürze wegen

$$n^h+A_1 n^{h-1}+A_2 n^{h-2}+\ldots+A_h=P$$
$$n^h+a_1 n^{h-1}+a_2 n^{h-2}+\ldots+a_h=p,$$

so bieten sich folgende Betrachtungen dar:

1) Da die Glieder $u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots\ldots$ der vorgelegten unendlichen Reihe hier offenbar als verschieden gedacht werden, so können die Polynome P, p nicht identisch seyn, daher sind auch nicht sämmtliche Differenzen A_1-a_1, A_2-a_2, $A_3-a_3\ \ldots\ldots$ gleich Null. Es sey A_g-a_g die erste nicht verschwindende derselben, so hat man

$$P-p=(A_g-a_g)\,n^{h-g}+(A_{g+1}-a_{g+1})\,n^{h-g-1}+\ldots+A_h-a_h.$$

Bei dem unendlichen Wachsen von n werden die Größen P, p positiv, und die Differenz $P-p$ erhält das Zeichen von A_g-a_g, daher wird $P>p$ oder $P<p$, folglich auch $u_{n+1}>u_n$ oder $u_{n+1}<u_n$, je nachdem A_g-a_g positiv oder negativ ist.

Ist also die erste der von 0 verschiedenen unter den Differenzen A_1-a_1, A_2-a_2, $A_3-a_3\ldots$ positiv, so geht die Reihe $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ldots$

zuletzt gewiß in eine steigende über; ist aber die erwähnte Differenz negativ, so endigt sich die Reihe in eine fallende, und dabei erhalten ihre Glieder sämmtlich dasselbe Zeichen.

2) Ob aber die Glieder der oben betrachteten Reihe bei diesem Steigen oder Fallen unendlich groß oder unendlich klein werden können, oder ob sie dabei an eine bestimmte Grenze gebunden sind, dieß hängt bloß von der Beschaffenheit der Differenz der Coefficienten A_1, a_1 ab.

Untersuchen wir vor der Hand nur das Verhalten der Größe $U_n = \frac{u_n^k}{n}$, wobei k eine ganze positive Zahl anzeigt, während dem unendlichen Wachsen von n. Der Quotient

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \text{ ist } = \frac{n \quad P^k}{(n+1)\,p^k} = \frac{n \quad (n^{hk} + kA_1 n^{hk-1} + \ldots.)}{(n+1)\,(n^{hk} + ka_1 n^{hk-1} + \ldots.)},$$

worin bloß die ersten zwei Glieder der Potenzen P^k, p^k mit Hülfe des aus der Arithmetik bekannten binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten entwickelt worden sind, d. h. es ist

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{hk+1} + kA_1 n^{hk} + \ldots.}{n^{hk+1} + (ka_1+1)\,n^{hk} + \ldots.}.$$

Ist $A_1 - a_1$ eine positive Größe, so kann man die ganze positive Zahl k immer so wählen, daß die Differenz

$$kA_1 - (ka_1 + 1) = k\,(A_1 - a_1) - 1$$

einen positiven Werth erhält, und dann ist man vermöge 1) berechtiget zu schließen, daß U_n, wenn n unendlich wächst, zuletzt auch fortwährend zunimmt. Aber $U_n = \frac{u_n^k}{n}$ kann, wenn der Nenner n unendlich groß wird, gar nicht in den Zustand des Wachsens gelangen, wenn nicht auch der Zähler u_n^k unendlich zunimmt; daher muß ebenfalls $\sqrt[k]{u_n^k}$ oder u_n unendlich groß werden.

Ist also $A_1 - a_1$ positiv, so wachsen die Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ zuletzt in das Unendliche.

3) Betrachten wir auf dieselbe Art die Größe $U_n = n u_n^k$, wobei k eine ganze positive Zahl vorstellt, so haben wir

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{hk+1} + (kA_1+1)\,n^{hk} + \ldots.}{n^{hk+1} + ka_1 n^{hk} + \ldots.}.$$

Ist $A_1 - a_1$ negativ, so kann man k immer so wählen, daß die Differenz $kA_1 + 1 - ka_1 = 1 - k(a_1 - A_1)$ negativ ausfällt, also

nach 1) die Größe U_n bei dem unendlichen Wachsen von n fortwährend abnimmt. Aber $U_n = n u_n^k$ kann hiebei nur dann kleiner zu werden anfangen, wenn u_n^k, also auch u_n unendlich abnimmt.

Ist demnach $A_1 - a_1$ negativ, so werden die Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$ zuletzt unendlich klein.

4) Ist $A_1 - a_1 = 0$, so nähern sich die Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots, u_n$ ohne Ende einer bestimmten Grenze.

Unter der Voraussetzung $A_1 - a_1 = 0$ sind zwei Fälle möglich; entweder es wird bei dem unendlichen Wachsen von n, u_n zuletzt fortwährend größer, oder fortwährend kleiner. Welcher von beiden Fällen Statt finde, wird nach 1) entschieden.

Im ersten Falle, wenn nämlich die vorgelegte Reihe eine steigende ist, nehmen wir die Größe $U_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^k u_n$ zu Hülfe, wobei k die frühere Bedeutung hat.

Es ist der Quotient

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n^2-1)^k P}{n^{2k} p} = \frac{n^{h+2k} + A_1 n^{h+2k-1} + (A_2 - k) n^{h+2k-2} + \ldots}{n^{h+2k} + a_1 n^{h+2k-1} + a_2 n^{h+2k-2} + \ldots}$$

und dabei kann man k so wählen, daß die Differenz $A_2 - k - a_2$ negativ wird, folglich U_n bei dem unendlichen Wachsen von n zuletzt fortwährend abnimmt. Aber es ist $\left(\frac{n}{n-1}\right)^k u_n$ oder $U_n > u_n$, und u_n wächst der Voraussetzung zu Folge, wenn n unendlich groß wird, folglich kann u_n eine bestimmte Grenze nicht überschreiten.

Im zweiten Falle, wenn die vorgelegte Reihe eine fallende ist, setze man $U_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k u_n$, so hat man

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{h+2k} + A_1 n^{h+2k-1} + A_2 n^{h+2k-2} + \ldots}{n^{h+2k} + a_1 n^{h+2k-1} + (a_2 - k) n^{h+2k-2} + \ldots}.$$

Nimmt man k so an, daß die Differenz

$$A_2 - (a_2 - k) = k + A_2 - a_2$$

positiv ausfällt, so muß U_n bei dem unendlichen Wachsen von n zunehmen; aber die der Voraussetzung gemäß abnehmende Größe u_n ist dabei stets größer als U_n, folglich ist u_n bei dem unendlichen Wachsen von n an eine bestimmte Grenze gebunden.

5) Wenden wir die hier bewiesenen Sätze mit Gauß auf die Reihe

$$1,\ \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma},\ \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)},\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},\ \text{etc.}$$

an, so haben wir

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)(\beta+n)}{1\cdot2\ldots n\cdot(n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)(\gamma+n)},$$

folglich: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}$.

Sind also α, β, γ keine ganzen negativen Zahlen, damit die Reihe weder abbrechen, noch durch Glieder, deren Nenner $=0$ werden, eine Störung erleiden kann, so wachsen die Glieder der angeführten Reihe unendlich, wenn $\alpha+\beta-\gamma-1$ positiv ist; sie nehmen unendlich ab, wenn $\alpha+\beta-\gamma-1$ negativ ist; sie nähern sich fortwährend einer bestimmten Grenze, wenn $\alpha+\beta-\gamma-1=0$ ist, und zwar wachsend oder abnehmend, je nachdem $\alpha\beta-\gamma$ positiv oder negativ ausfällt.

Setzen wir $\beta=1$, so finden wir, daß die Glieder der Reihe

$$1,\ \frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)},\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},\ \text{etc.},$$

wenn α, γ keine ganzen negativen Zahlen sind, unendlich wachsen, unendlich abnehmen, oder an eine bestimmte Grenze gebunden sind, je nachdem $\alpha-\gamma$ positiv, negativ, oder $=0$ ist. Im letzten Falle wird offenbar jedes Glied der Reihe $=1$.

6) Bei der bisher betrachteten Reihe u_0, u_1, u_2 .... kann von der Convergenz nur dann die Rede seyn, wenn A_1-a_1 negativ ist, weil von diesem Umstande die unendliche Abnahme der Glieder abhängt. Allein es wird zur Convergenz dieser Reihe überdieß noch erfordert, daß a_1-A_1 die Einheit übersteige.

Ist a_1-A_1 nicht größer als 1, so kann in dem Quotienten

$$\frac{(n-k+1)u_{n+1}}{(n-k)\,u_n} = \frac{n^{h+1}+(A_1-k+1)n^h+(A_2-A_1(k-1))n^{h-1}+\ldots}{n^{h+1}+(a_1-k)\,n^h+(a_2-a_1k)\,n^{h-1}+\ldots}$$

die ganze positive Zahl k (welche hier übrigens nur dann nöthig ist, wenn $A_1-a_1+1=0$ seyn sollte) immer so angenommen werden, daß die Differenz der Coefficienten von n^{h-1}, nämlich

$$k(a_1-A_1)+A_1+A_2-a_2,$$

einen positiven Werth erhält. Dabei wird, wenn n unendlich wächst, sobald diese Zahl eine gewisse Grenze ρ überstiegen hat, der obige Quotient fortwährend positiv und >1 seyn (vergl. 1). Ist r eine ganze positive Zahl, welche k und ρ übertrifft, so wird für alle Werthe von n, welche nicht kleiner sind als r, um so mehr

$$\frac{(n-k+1)u_{n+1}}{(r-k)u_r} > 1, \text{ also}$$

$$u_{n+1} > (r-k)u_r \cdot \frac{1}{n-k+1}.$$

Setzt man $n=r, r+1, r+2 \ldots\ldots,$ und addirt man alle Resultate, so ergibt sich

$$u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \ldots\ldots \text{ etc.}$$
$$> (r-k)u_r\left(\frac{1}{r-k+1} + \frac{1}{r-k+2} + \frac{1}{r-k+3} + \ldots\right).$$

Aber $\frac{1}{r-k+1} + \frac{1}{r-k+2} + \frac{1}{r-k+3} + \ldots\ldots$ ist die auf das $(r-k)^{te}$ Glied folgende Ergänzung in der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{ etc.},$$

folglich eine divergirende Reihe; es divergirt also auch

$$u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \ldots\ldots,$$

und daher auch $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{ etc.}$

7) Ist $a_1 - A_1 > 1$, so läßt sich auf dieselbe Art wie in 6) zeigen, daß der Quotient $\frac{n\,u_{n+1}}{(n-k-1)\,u_n}$, wobei k positiv und kleiner als $a_1 - A_1 - 1$ angenommen wird, für alle Werthe von n, welche eine gewisse Zahl ρ überschreiten, positiv und kleiner als die Einheit seyn muß, folglich in Bezug auf diese Werthe $u_{n+1} < \frac{n-k-1}{n}u_n$ gesetzt werden kann. Es sey hier nach und nach $n=r, r+1, r+2 \ldots\ldots,$ wobei r größer als $k+1$ und ρ gedacht wird, so hat man

$$u_{r+1} < \frac{r-k-1}{r}u_r,\ u_{r+2} < \frac{r-k}{r+1}u_{r+1},\ u_{r+3} < \frac{r-k+1}{r+2}u_{r+2}, \text{ etc.},$$

folglich

$$u_{r+2} < \frac{(r-k-1)(r-k)}{r(r+1)}u_r,\ u_{r+3} < \frac{(r-k-1)(r-k)(r-k+1)}{r(r+1)(r+2)}u_r, \text{ etc.}$$

und

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots\ldots < u_r\left(1 + \frac{r-k-1}{r} + \frac{(r-k-1)(r-k)}{r(r+1)} + \ldots\ldots\right).$$

Nun ist $1 = \frac{r-1}{k} - \frac{r-k-1}{k}$

$$\frac{r-k-1}{r} = \frac{r-k-1}{k} - \frac{(r-k-1)(r-k)}{kr}$$

$$\frac{(r-k-1)(r-k)}{r(r+1)} = \frac{(r-k-1)(r-k)}{kr} - \frac{(r-k-1)(r-k)(r-k+1)}{kr(r+1)}$$

u. s. w., welche Gleichungen man leicht nach Belieben weiter fortsetzen kann, folglich überhaupt

$$1 + \frac{r-k-1}{r} + \frac{(r-k-1)(r-k)}{r(r+1)} + \ldots + \frac{(r-k-1)(r-k)\ldots(r-k+t-1)}{r(r+1)\ldots(r+t)}$$
$$= \frac{r-1}{k} - \frac{(r-k-1)(r-k)\ldots(r-k+t)}{kr(r+1)\ldots(r+t)}.$$

Wächst t unendlich, so nimmt der Bruch

$$\frac{(r-k)\ldots\ldots(r-k+t)}{r\ldots\ldots\ldots(r+t)},$$

wie man aus dem 2ten Beispiele in 5) sieht, wenn man daselbst $\alpha = r-k$, $\gamma = r$ setzt, unendlich ab, folglich hat man

$$1 + \frac{r-k-1}{r} + \frac{(r-k-1)(r-k)}{r(r+1)} + \text{etc.} = \frac{r-1}{k},$$

und daher

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots < u_r \cdot \frac{r-1}{k},$$

woraus die Convergenz der vorgelegten Reihe erhellet.

8) Die Reihe

$$1, \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}, \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} \text{ etc.}$$

convergirt also nur, wenn $\alpha+\beta-\gamma$ negativ ist.

Siebente Vorlesung.

Über die Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen, und über den binomischen Lehrsatz.

Wenn eine nach den steigenden, mit ganzen positiven Exponenten versehenen Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnete unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \text{ꝛc.}$$

für alle zwischen bestimmten Grenzen, z. B. $-A$ und $+A$ liegende Werthe von x convergirt, so kann man ihre Summe, welche von dem jedesmaligen Werthe der veränderlichen Größe abhängt, durch $f(x)$ vorstellen, und daher für alle Werthe des x, von $x = -A$ bis $x = +A$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ꝛc.}$$

setzen. Man sagt in diesem Falle, die unendliche Reihe sey die Entwickelung der Function $f(x)$.

Diese Function läßt sich auf keine andere Art in eine nach den steigenden Potenzen der veränderlichen Größe fortschreitende Reihe verwandeln. Denn setzt man für alle Werthe des x, von $x = -B$ bis $x = +B$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \text{ꝛc.},$$

so ist für alle innerhalb der angeführten Grenzen

$$\begin{matrix} x = -A \\ x = +A \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x = -B \\ x = +B \end{matrix}$$

zugleich liegende Werthe von x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots,$$

folglich dem in der fünften Vorlesung 9) Gesagten gemäß:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2 \text{ ꝛc.}$$

Die Verwandlung der Functionen in convergirende Reihen macht eines der Hauptgeschäfte der Analysis aus, da man in den meisten Fällen genöthigt wird, wenn es sich um die Berechnung des Werthes handelt, welchen eine Function für gegebene Werthe der ihr zum Grunde liegenden veränderlichen Größen erhält, zu unendlichen Reihen seine Zuflucht zu nehmen.

Manchmal bietet sich auch das umgekehrte Problem dar, nämlich die Function anzugeben, aus welcher eine vorgelegte Reihe entspringt.

Wir wollen hievon in gegenwärtiger Vorlesung ein Beispiel vortragen, wobei wir zugleich Gelegenheit finden werden, von den früher ertheilten Regeln über die Convergenz der Reihen Gebrauch zu machen.

Aus der Elementar-Mathematik ist bekannt, daß jede Potenz eines Binoms $1+x$ mit einem ganzen positiven Exponenten m durch die Potenzen $x, x^2, x^3 \ldots x^m$ mittelst folgender Gleichung (der binomische Lehrsatz genannt) ausgedrückt wird:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \ldots\ldots + m x^{m-1} + x^m.$$

Die Coefficienten der Potenzen von x, welche die Binomial-Coefficienten heißen, gehen aus der allgemeinen Form

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$$

hervor, wenn man nach der Ordnung $n = 1, 2, 3, 4 \ldots m$ setzt. Nimmt man $n > m$ an, so ergibt sich die Nulle als Resultat. Der jedesmalige Werth von n ist zugleich der Exponent der mit dem berechneten Coefficienten verbundenen Potenz von x.

Die Potenzen x^n und x^{m-n}, deren Exponenten sich zur Summe m ergänzen, haben gleiche Coefficienten. Diese sind nämlich, der angeführten Form gemäß:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} \text{ und } \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots(m-n)}.$$

Bringt man dieselben auf den gemeinschaftlichen Nenner

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots(m-n),$$

so erhalten beide den Zähler

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots(m-2)(m-1)m,$$

und sind daher einander gleich.

Die Reihe

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \text{rc.}$$

kann aber auch unter der Voraussetzung betrachtet werden, daß m keinen ganzen positiven Werth erhält, in welchem Falle sie offenbar in das Unendliche fortlauft.

Bezeichnen wir die Coefficienten der Potenzen von x in dieser Reihe, der Kürze wegen, durch die Symbole

$$\binom{m}{1},\ \binom{m}{2},\ \binom{m}{3}\ \ldots\ldots \text{ u. s. w.},$$

indem wir allgemein $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n}$ durch $\binom{m}{n}$ vorstellen, so haben wir

$$\binom{m}{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))(m-n)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n\ .\ (n+1)},$$

$$\text{also } \frac{\binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}} = \frac{m-n}{n+1} = -\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Bei dem unendlichen Wachsen des Zeigers n wird

$$\lim. \frac{\binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}} = -1;$$

es convergirt daher die vorgelegte Reihe für alle Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen $x=-1$ und $x=+1$ liegen, und sie divergirt für alle außerhalb derselben befindlichen Werthe.

Das Verhalten der Reihe für $x=\pm 1$ ist nach den in der sechsten Vorlesung vorgetragenen Lehren zu beurtheilen.

Ist $x=+1$, so geht dieselbe in

$$1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\ldots\ldots+\binom{m}{n}+\binom{m}{n+1}+ \text{ic.}$$

über. Da nun im Quotienten

$$\frac{\binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}} = -\frac{n-m}{n+1}$$

die Differenz der mit n verbundenen Glieder $-m$ und $+1$, nämlich $-m-1$ für alle positiven Werthe von m, und für alle negativen Werthe von m, welche die Einheit nicht erreichen, negativ ausfällt; ferner dieser Quotient, sobald $n>m$ geworden ist, das Zeichen $-$ erhält, und deshalb die Zeichen der Glieder der Reihe zu wechseln an-

fangen, so convergirt dieselbe gewiß, so lange m keine negative, die Einheit übersteigende Zahl ist (6. Vorles. 3)).

Setzt man ferner $x = -1$, so hat man die Reihe

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots\ldots \pm \binom{m}{n} \mp \binom{m}{n+1} \pm \text{etc.}$$

Aus dem Quotienten $\dfrac{\mp \binom{m}{n+1}}{\pm \binom{m}{n}} = \dfrac{n-m}{n+1}$ erhellet (6. Vorl. 7)), daß dieselbe nur dann convergirt, wenn m einen positiven Werth bekömmt.

Es entsteht nun die Frage, welche Function von x durch die Reihe

$$1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots + \binom{m}{n} x^n + \text{etc.},$$

wenn m keine ganze positive Zahl bedeutet, und x zwischen -1 und $+1$ liegt, vorgestellt werde?

Wir werden diese Frage durch folgende Betrachtungen beantworten.

Sehen wir bloß auf die Bildung der vorgelegten Reihe aus der Zahl m, und setzen wir

$$f(m) = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots\ldots,$$

so haben wir, wenn m nach und nach in α, β, γ, δ .... übergeht, wobei diese Buchstaben was immer für Zahlen anzeigen,

$$f(\alpha) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots$$
$$f(\beta) = 1 + \binom{\beta}{1} x + \binom{\beta}{2} x^2 + \binom{\beta}{3} x^3 + \ldots$$
$$f(\gamma) = 1 + \binom{\gamma}{1} x + \binom{\gamma}{2} x^2 + \binom{\gamma}{3} x^3 + \ldots$$
$$f(\delta) = 1 + \binom{\delta}{1} x + \binom{\delta}{2} x^2 + \binom{\delta}{3} x^3 + \ldots$$

u. s. w.

Das Product dieser Reihen, welches, wenn x die oben erwähnten Grenzen nicht überschreitet, eine convergirende Reihe von der Form

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

seyn muß, wird aus den Zahlen α, β, γ, δ .... nach den Gesetzen der Multiplication auf einerlei Art gebildet, wie auch immer die Werthe dieser Zahlen beschaffen seyn mögen, so daß es hinreicht, die Bildung dieses Productes für den Fall zu kennen, wenn α, β, γ, δ .... unbestimmte ganze positive Zahlen vorstellen, um im Stande zu seyn, dasselbe in allen übrigen Fällen anzugeben.

Sind α, β, γ, δ .... ganze positive Zahlen, so läßt sich das Product $f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot f(\delta) \ldots$ ohne wirkliche Multiplication sogleich finden, wenn man bedenkt, daß unter dieser Voraussetzung

$$f(\alpha) = (1+x)^\alpha, \quad f(\beta) = (1+x)^\beta, \quad f(\gamma) = (1+x)^\gamma$$

ist, u. s. w.; folglich

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot f(\delta) \ldots = (1+x)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots}$$

seyn muß.

Aber in so fern α, β, γ, δ .... ganze positive Zahlen sind, ist

$$(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} = f(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots);$$

daher haben wir die Gleichung

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot f(\delta) \ldots = f(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots),$$

welche aus dem oben angeführten Grunde nicht bloß auf ganze positive Werthe von α, β, γ, δ ... eingeschränkt ist, sondern allgemein gilt, diese Größen mögen was immer für andere Werthe erhalten.

Es sey nun $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots$ rc. und die Anzahl dieser Größen $= q$, wobei q eine ganze positive Zahl vorstellt, so verwandelt sich obige Gleichung in

$$[f(\alpha)]^q = f(q\alpha),$$

woraus $f(\alpha) = [f(q\alpha)]^{\frac{1}{q}}$ folgt. Lassen wir hier $\alpha = \frac{p}{q}$ seyn, wobei p ebenfalls eine ganze positive Zahl anzeigt, so haben wir

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = [f(p)]^{\frac{1}{q}}.$$

Allein in so fern p eine ganze positive Zahl bedeutet, ist

$$f(p) = (1+x)^p,$$

folglich besteht die Gleichung

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}};$$

oder wenn man statt $f\left(\frac{p}{q}\right)$ die durch dieses Zeichen vorgestellte Reihe schreibt:

$$1 + \left(\frac{p}{q}\right)_1 x + \left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2 + \left(\frac{p}{q}\right)_3 x^3 + \ldots = (1+x)^{\frac{p}{q}},$$

worin x alle zwischen -1 und $+1$ liegenden Werthe haben darf.

Betrachten wir gegenwärtig die Gleichung

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta),$$

zu welcher man gelangt, wenn man bloß das Product zweier Reihen der vorgelegten Form aufsucht, und setzen wir $\alpha = m$, $\beta = -m$, so ergibt sich

$$f(m) \cdot f(-m) = f(o).$$

Aber $f(o) = 1 + \binom{o}{1} x + \binom{o}{2} x^2 + \binom{o}{3} x^3 + \ldots\ldots$ reducirt sich bloß auf das erste Glied 1, daher ist

$$f(m) \cdot f(-m) = 1$$

$$\text{und} \quad f(-m) = \frac{1}{f(m)} = [f(m)]^{-1}.$$

Ist m eine ganze positive Zahl, oder ein positiver Bruch, so ist dem bereits erhaltenen Resultate gemäß

$$f(m) = (1 + x)^m,$$

daher haben wir auch

$$f(-m) = (1 + x)^{-m}.$$

Es besteht also für jeden ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen, mit der Einheit commensurablen Werth des Exponenten m die Gleichung

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots\ldots \text{ꝛc.},$$

welche aber, wenn m keine ganze positive Zahl ist, nur für die innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegenden Werthe von x zugelassen werden kann.

Lassen wir m eine veränderliche commensurable Zahl seyn, welche sich der incommensurablen Zahl μ ohne Ende nähert, so ist $m = \mu + \omega$, wobei ω sich im Zustande des unendlichen Abnehmens befindet, und wir haben

$$(1 + x)^{\mu + \omega} = 1 + \binom{\mu + \omega}{1} x + \binom{\mu + \omega}{2} x^2 + \binom{\mu + \omega}{3} x^3 + \text{ꝛc.}$$

Gehen wir von der veränderlichen Zahl $\mu + \omega$ auf ihre Grenze μ über, so erhalten wir offenbar

$$(1 + x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \binom{\mu}{3} x^3 + \text{ꝛc.}$$

Es ist also der binomische Lehrsatz für jeden Werth des Exponenten bewiesen.

Setzen wir $\frac{x}{a}$ statt x, und multipliciren wir beide Theile der Gleichung mit a^μ, so ergibt sich

$$(a+x)^\mu = a^\mu + \binom{\mu}{1} a^{\mu-1} x + \binom{\mu}{2} a^{\mu-2} x^2 + \binom{\mu}{3} a^{\mu-3} x^3 + \text{etc.},$$

wobei x im Allgemeinen zwischen $-a$ und $+a$ fallen muß.

Auch ist aus dem früher Gesagten ersichtlich, daß die Gleichung

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \text{etc.}$$

für alle positiven Werthe von m und für alle negativen, die Einheit nicht übersteigenden Werthe dieser Zahl, hingegen die Gleichung

$$(1-1)^m = 0 = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \text{etc.}$$

nur für positive Werthe von m besteht.

Achte Vorlesung.

Uber die Entwickelung der Exponential-Größen und Logarithmen.

Aus der zweiten Vorlesung ist bekannt, daß die Potenz

$$(1 + v)^{\frac{1}{\omega}},$$

in welcher ω und v unendlich abnehmende Größen bedeuten, jede beliebige, von der Einheit verschiedene Zahl a darstellen könne. Setzt man nun zwischen ω und v eine bestimmte Relation fest, so wird sich diese Potenz bei dem unendlichen Abnehmen von ω einer gewissen Grenze ohne Ende nähern. Es sey $v = k\omega$, wobei k eine unveränderliche Zahl anzeigt, und

$$lim. (1 + k\omega)^{\frac{1}{\omega}} = a,$$

so läßt sich a durch k, und umgekehrt k durch a leicht ausdrücken. Um jedoch dieser Untersuchung eine größere Ausdehnung zu geben, erhebe man beide Theile der obigen Gleichung zur Potenz x, wobei das Abnehmen von ω auf x keinen Einfluß ausüben soll, so ist den in der zweiten Vorlesung aufgestellten Sätzen gemäß

$$(1) \qquad a^x = lim. (1 + k\omega)^{\frac{x}{\omega}}.$$

Entwickeln wir den zweiten Theil nach dem binomischen Lehrsatze, so haben wir

$$a^x = lim. \left[1 + \frac{x}{\omega} . k\omega + \frac{\frac{x}{\omega}\left(\frac{x}{\omega} - 1\right)}{1 . 2} k^2 \omega^2 + \frac{\frac{x}{\omega}\left(\frac{x}{\omega} - 1\right)\left(\frac{x}{\omega} - 2\right)}{1 . 2 . 3} k^3 \omega^3 + \ldots . \right]$$

oder $a^x = lim. \left[1 + kx + \frac{x(x-\omega)}{1 . 2} k^2 + \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{1 . 2 . 3} k^3 + \text{rc.}\right]$,

also, wegen des unendlich klein Werdens von ω, bei dem Übergange auf die Grenzen:

$$(2) \qquad a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1 . 2} + \frac{k^3 x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{k^4 x^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \text{rc.}$$

Diese Reihe muß für jeden Werth von x convergiren, da die Binomialformel, aus welcher sie entstanden ist, für jeden Werth von x convergirt. Die in der fünften Vorlesung 4) gegebene Regel bestätigt diese Behauptung.

Nimmt man nämlich den Quotienten der Coefficienten von x^n und x^{n+1}, so findet man ihn $= \frac{k}{n+1}$, also bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich abnehmend, so daß sein Product mit x, bei jedem Werthe dieser Größe, zuletzt kleiner wird als die Einheit. Die Abnahme der Glieder der Reihe, und mit dieser die Convergenz der Reihe beginnt, sobald $n+1 > kx$ oder $n > kx - 1$ geworden ist.

Setzt man in der Gleichung (2) $x = 1$, so hat man

$$(3) \qquad a = 1 + k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \text{rc.},$$

wodurch man in den Stand gesetzt wird, a näherungsweise mit jeder beliebigen Schärfe zu berechnen, wenn k gegeben ist.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn $k = 1$ angenommen wird. Dann ist

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{rc.}$$

Sucht man die Werthe von 18 Gliedern dieser Reihe, wovon das letzte in der 14ten Decimalstelle keine von 0 verschiedene Ziffer enthält, so findet man diesen Werth von $a = 2{\cdot}718281828459 \ldots\ldots$

Diese Zahl, welche die Grenze ist, der sich die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ bei dem unendlichen Abnehmen von ω ohne Ende nähert, wird gewöhnlich durch den Buchstaben e bezeichnet. Es ist also

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{rc.} = 2{\cdot}718281828459 \ldots\ldots$$

Die Beziehung, welche zwischen a und k Statt findet, wird aus der Gleichung (2) erkannt, wenn man daselbst $\frac{1}{k}$ statt x, oder 1 statt kx schreibt. Man findet

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{rc.},$$

$$\text{d. h.} \quad a^{\frac{1}{k}} = e \quad \text{oder} \quad a = e^k.$$

Ein Logarithmensystem, welches e zur Grundzahl hätte, würde für jeden Werth von a das zugehörige k, und umgekehrt für jeden

Werth von k das zugehörige a sogleich darbieten. Man nennt dieses Logarithmensystem, welches in der gesammten Analysis vom ausgedehntesten Gebrauche ist, das natürliche, und bezeichnet die Logarithmen desselben durch den Buchstaben l, indem man die Sylbe $log.$ jedem anderen Systeme vorbehält.

Es ist also $k = la$, und daher hat man auch

$$(4) \qquad a^x = 1 + x\,la + \frac{(x\,la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Aus der Gleichung $lim.\,(1 + k\omega)^{\frac{1}{\omega}} = a$, in welcher sich das Zeichen $lim.$ auf das unendliche Abnehmen von ω bezieht, folgt:

$$(1 + k\omega)^{\frac{1}{\omega}} = a + v,$$

wobei v eine mit ω zugleich unendlich klein werdende Größe anzeigt; daher ist

$$k = \frac{(a + v)^{\omega} - 1}{\omega}$$

$$\text{oder } k = lim.\,\frac{a^{\omega} - 1}{\omega},$$

$$\text{also auch } la = lim.\,\frac{a^{\omega} - 1}{\omega}.$$

Es ist demnach der natürliche Logarithme einer Zahl a die Grenze, der sich der Quotient $\frac{a^{\omega} - 1}{\omega}$ bei dem unendlichen Abnehmen von ω fortwährend nähert.

Diese Bemerkung dient uns dazu, den Logarithmus jeder gegebenen Zahl a im natürlichen Systeme durch dieselbe auszudrücken. Da der Logarithmus der Einheit ohnehin bekannt ist (er ist in jedem Systeme $= 0$), so sey $a = 1 + z$, wobei z von 0 verschieden gedacht wird. Wir haben

$$l(1 + z) = lim.\,\frac{(1 + z)^{\omega} - 1}{\omega}.$$

Es ist aber, so lange z, numerisch betrachtet, die Einheit nicht übersteigt:

$$(1 + z)^{\omega} = 1 + \omega z + \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.},$$

folglich

$$\frac{(1+z)^\omega-1}{\omega}=z+\frac{\omega-1}{1.2}z^2+\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}z^3+ \text{ꝛc.};$$

und, wenn ω unendlich klein wird:

$$lim.\ \frac{(1+z)^\omega-1}{\omega}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{ꝛc., also}$$

$$(5)\qquad l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{ꝛc.}\begin{Bmatrix}z=-1\\z=+1\end{Bmatrix},$$

wo die Grenzen, innerhalb welcher die Werthe von z liegen müssen, wenn diese Gleichung nicht ungereimt werden soll, neben derselben angezeigt sind; was wir, um Irrungen oder Weitläufigkeiten in der Rede zu vermeiden, auch in der Folge immer thun werden.

Für $z=+1$ convergirt die unendliche Reihe, für $z=-1$ divergirt sie bekannter Maßen. Im ersten Falle ist

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

Allein es würde eine ungeheure Arbeit nöthig seyn, um mittelst dieser Reihe den natürlichen Logarithmus der Zahl 2 auch nur auf wenige Decimalstellen genau zu finden. Dasselbe gilt auch von der Gleichung (5), wenn z nicht merklich kleiner ist als die Einheit. Indessen läßt sich dieselbe gebrauchen, um daraus andere für die Anwendung bequeme Reihen abzuleiten. Wir wollen hier nur diejenigen Reihen anführen, welche auch in analytischer Beziehung wichtig sind, ohne uns in eine förmliche Anleitung zur Construction logarithmischer Tabellen einzulassen.

Setzt man in (5) $-z$ statt z, so ergibt sich

$$(6)\qquad l(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\text{ꝛc.}\begin{Bmatrix}z=-1\\z=+1\end{Bmatrix},$$

folglich durch Subtraction dieser Gleichung von (5)

$$(7)\qquad l\frac{1+z}{1-z}=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\ldots\right)\begin{Bmatrix}z=-1\\z=+1\end{Bmatrix}.$$

Setzt man hier $\frac{1+z}{1-z}=x$, woraus $z=\frac{x-1}{x+1}$ folgt, so hat man

$$(8)\qquad lx=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right]\begin{Bmatrix}x=0\\x=+\infty\end{Bmatrix}.$$

Man setze in (7) $\frac{1+z}{1-z}=\frac{x^2}{x^2-1}$, also

$$z=\frac{1}{2x^2-1}\quad\text{und}\quad l\frac{1+z}{1-z}=2lx-l(x+1)-l(x-1),$$

so ergibt sich

$$9) \quad lx = \frac{l(x+1)+l(x-1)}{2} + \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{etc.}\right].$$

Diese Formel ist zur successiven Berechnung der Logarithmen vorzüglich anwendbar.

Es sey der Werth von

$$\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots\ldots = P_x,$$

so findet man für $x=2$ und $x=3$:

$$l2 = \frac{1}{2}l3 + P_2, \quad l3 = \frac{3}{2}l2 + P_3,$$

$$\text{folglich} \quad l2 = 2(2P_2 + P_3)$$

$$\text{und} \quad l3 = 2(3P_2 + 2P_3).$$

Die Zahlen P_2 und P_3 lassen sich mit Hülfe der Reihen

$$P_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \ldots\ldots$$

$$P_3 = \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \ldots\ldots$$

ohne große Mühe berechnen.

Sind die natürlichen Logarithmen von 2 und 3 gefunden, so hat man

$$l5 = \frac{l6+l4}{2} + P_5 = \frac{l3+3l2}{2} + P_5$$

$$l7 = \frac{l8+l6}{2} + P_7 = 2l2 + \frac{1}{2}l3 + P_7,$$

und so fort für die übrigen Primzahlen, auf deren Logarithmen es allein ankommt, da die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus denselben durch bloße Addition entstehen.

Verlangt man die Logarithmen in sieben Decimalstellen, so kann man für alle Primzahlen, welche 11 überschreiten:

$$lx = \frac{l(x+1)+l(x-1)}{2} + \frac{1}{2x^2-1},$$

und für alle Primzahlen, welche 2237 überschreiten:

$$lx = \frac{l(x+1)+l(x-1)}{2} \text{ setzen.}$$

Es sey in (7) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{x+\delta}{x}$, also $z = \frac{\delta}{2x+\delta}$, so ergibt sich

$$(10) \quad l(x+\delta) = lx + 2\left(\frac{\delta}{2x+\delta} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right)^3 + \ldots\right);$$

Setzen wir $\frac{x}{a}$ statt x, und multipliciren wir beide Theile der Gleichung mit a^μ, so ergibt sich

$$(a+x)^\mu = a^\mu + \binom{\mu}{1} a^{\mu-1} x + \binom{\mu}{2} a^{\mu-2} x^2 + \binom{\mu}{3} a^{\mu-3} x^3 + \text{ꝛc.},$$

wobei x im Allgemeinen zwischen $-a$ und $+a$ fallen muß.

Auch ist aus dem früher Gesagten ersichtlich, daß die Gleichung

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \text{ꝛc.}$$

für alle positiven Werthe von m und für alle negativen, die Einheit nicht übersteigenden Werthe dieser Zahl, hingegen die Gleichung

$$(1-1)^m = 0 = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \text{ꝛc.}$$

nur für positive Werthe von m besteht.

Achte Vorlesung.

Über die Entwickelung der Exponential-Größen und Logarithmen.

Aus der zweiten Vorlesung ist bekannt, daß die Potenz

$$(1 + v)^{\frac{1}{\omega}},$$

in welcher ω und v unendlich abnehmende Größen bedeuten, jede beliebige, von der Einheit verschiedene Zahl a darstellen könne. Setzt man nun zwischen ω und v eine bestimmte Relation fest, so wird sich diese Potenz bei dem unendlichen Abnehmen von ω einer gewissen Grenze ohne Ende nähern. Es sey $v = k\omega$, wobei k eine unveränderliche Zahl anzeigt, und

$$\lim. (1 + k\omega)^{\frac{1}{\omega}} = a,$$

so läßt sich a durch k, und umgekehrt k durch a leicht ausdrücken. Um jedoch dieser Untersuchung eine größere Ausdehnung zu geben, erhebe man beide Theile der obigen Gleichung zur Potenz x, wobei das Abnehmen von ω auf x keinen Einfluß ausüben soll, so ist den in der zweiten Vorlesung aufgestellten Sätzen gemäß

$$(1) \qquad a^x = \lim. (1 + k\omega)^{\frac{x}{\omega}}.$$

Entwickeln wir den zweiten Theil nach dem binomischen Lehrsatze, so haben wir

$$a^x = \lim. \left[1 + \frac{x}{\omega} \cdot k\omega + \frac{\frac{x}{\omega}\left(\frac{x}{\omega} - 1\right)}{1 \cdot 2} k^2 \omega^2 + \frac{\frac{x}{\omega}\left(\frac{x}{\omega} - 1\right)\left(\frac{x}{\omega} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^3 \omega^3 + \ldots\right]$$

oder $a^x = \lim. \left[1 + kx + \frac{x(x-\omega)}{1 \cdot 2} k^2 + \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^3 + \text{ꝛc.}\right]$,

also, wegen des unendlich klein Werdens von ω, bei dem Übergange auf die Grenzen:

$$(2) \qquad a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe muß für jeden Werth von x convergiren, da die Binomialformel, aus welcher sie entstanden ist, für jeden Werth von x convergirt. Die in der fünften Vorlesung 4) gegebene Regel bestätigt diese Behauptung.

Nimmt man nämlich den Quotienten der Coefficienten von x^n und x^{n+1}, so findet man ihn $= \frac{k}{n+1}$, also bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich abnehmend, so daß sein Product mit x, bei jedem Werthe dieser Größe, zuletzt kleiner wird als die Einheit. Die Abnahme der Glieder der Reihe, und mit dieser die Convergenz der Reihe beginnt, sobald $n+1 > kx$ oder $n > kx - 1$ geworden ist.

Setzt man in der Gleichung (2) $x = 1$, so hat man

$$(3) \qquad a = 1 + k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \text{rc.},$$

wodurch man in den Stand gesetzt wird, a näherungsweise mit jeder beliebigen Schärfe zu berechnen, wenn k gegeben ist.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn $k = 1$ angenommen wird. Dann ist

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{rc.}$$

Sucht man die Werthe von 18 Gliedern dieser Reihe, wovon das letzte in der 14ten Decimalstelle keine von 0 verschiedene Ziffer enthält, so findet man diesen Werth von $a = 2{\cdot}718281828459\ldots.$

Diese Zahl, welche die Grenze ist, der sich die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ bei dem unendlichen Abnehmen von ω ohne Ende nähert, wird gewöhnlich durch den Buchstaben e bezeichnet. Es ist also

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{rc.} = 2{\cdot}718281828459\ldots.$$

Die Beziehung, welche zwischen a und k Statt findet, wird aus der Gleichung (2) erkannt, wenn man daselbst $\frac{1}{k}$ statt x, oder 1 statt kx schreibt. Man findet

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{rc.},$$

$$\text{d. h.} \quad a^{\frac{1}{k}} = e \quad \text{oder} \quad a = e^k.$$

Ein Logarithmensystem, welches e zur Grundzahl hätte, würde für jeden Werth von a das zugehörige k, und umgekehrt für jeden

Werth von k das zugehörige a sogleich darbieten. Man nennt dieses Logarithmensystem, welches in der gesammten Analysis vom ausgedehntesten Gebrauche ist, das natürliche, und bezeichnet die Logarithmen desselben durch den Buchstaben l, indem man die Sylbe $log.$ jedem anderen Systeme vorbehält.

Es ist also $k = l\,a$, und daher hat man auch

$$(4) \qquad a^x = 1 + x\,l\,a + \frac{(x\,l\,a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,l\,a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Aus der Gleichung $lim. (1 + k\omega)^{\frac{1}{\omega}} = a$, in welcher sich das Zeichen $lim.$ auf das unendliche Abnehmen von ω bezieht, folgt:

$$(1 + k\omega)^{\frac{1}{\omega}} = a + v,$$

wobei v eine mit ω zugleich unendlich klein werdende Größe anzeigt; daher ist

$$k = \frac{(a + v)^\omega - 1}{\omega}$$

$$\text{oder} \quad k = lim. \frac{a^\omega - 1}{\omega},$$

$$\text{also auch} \quad l\,a = lim. \frac{a^\omega - 1}{\omega}.$$

Es ist demnach der natürliche Logarithme einer Zahl a die Grenze, der sich der Quotient $\frac{a^\omega - 1}{\omega}$ bei dem unendlichen Abnehmen von ω fortwährend nähert.

Diese Bemerkung dient uns dazu, den Logarithmus jeder gegebenen Zahl a im natürlichen Systeme durch dieselbe auszudrücken. Da der Logarithmus der Einheit ohnehin bekannt ist (er ist in jedem Systeme $= 0$), so sey $a = 1 + z$, wobei z von 0 verschieden gedacht wird. Wir haben

$$l(1 + z) = lim. \frac{(1 + z)^\omega - 1}{\omega}.$$

Es ist aber, so lange z, numerisch betrachtet, die Einheit nicht übersteigt:

$$(1 + z)^\omega = 1 + \omega z + \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.},$$

folglich

$$\frac{(1+z)^\omega - 1}{\omega} = z + \frac{\omega - 1}{1.2} z^2 + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} z^3 + \text{2c.};$$

und, wenn ω unendlich klein wird:

$$\lim. \frac{(1+z)^\omega - 1}{\omega} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{2c.}, \text{ also}$$

$$(5) \quad l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{2c.} \begin{Bmatrix} z = -1 \\ z = +1 \end{Bmatrix},$$

wo die Grenzen, innerhalb welcher die Werthe von z liegen müssen, wenn diese Gleichung nicht ungereimt werden soll, neben derselben angezeigt sind; was wir, um Irrungen oder Weitläufigkeiten in der Rede zu vermeiden, auch in der Folge immer thun werden.

Für $z = +1$ convergirt die unendliche Reihe, für $z = -1$ divergirt sie bekannter Maßen. Im ersten Falle ist

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

Allein es würde eine ungeheure Arbeit nöthig seyn, um mittelst dieser Reihe den natürlichen Logarithmus der Zahl 2 auch nur auf wenige Decimalstellen genau zu finden. Dasselbe gilt auch von der Gleichung (5), wenn z nicht merklich kleiner ist als die Einheit. Indessen läßt sich dieselbe gebrauchen, um daraus andere für die Anwendung bequeme Reihen abzuleiten. Wir wollen hier nur diejenigen Reihen anführen, welche auch in analytischer Beziehung wichtig sind, ohne uns in eine förmliche Anleitung zur Construction logarithmischer Tabellen einzulassen.

Setzt man in (5) $-z$ statt z, so ergibt sich

$$(6) \quad l(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \text{2c.} \begin{Bmatrix} z = -1 \\ z = +1 \end{Bmatrix},$$

folglich durch Subtraction dieser Gleichung von (5)

$$(7) \quad l\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \ldots\right) \begin{Bmatrix} z = -1 \\ z = +1 \end{Bmatrix}.$$

Setzt man hier $\frac{1+z}{1-z} = x$, woraus $z = \frac{x-1}{x+1}$ folgt, so hat man

$$(8) \quad lx = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right] \begin{Bmatrix} x = 0 \\ x = +\infty \end{Bmatrix}.$$

Man setze in (7) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{x^2}{x^2-1}$, also

$$z = \frac{1}{2x^2-1} \quad \text{und} \quad l\frac{1+z}{1-z} = 2lx - l(x+1) - l(x-1),$$

so ergibt sich

$$9)\quad lx = \frac{l(x+1)+l(x-1)}{2} + \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{x.}\right].$$

Diese Formel ist zur successiven Berechnung der Logarithmen vorzüglich anwendbar.

Es sey der Werth von

$$\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots\ldots = P_x,$$

so findet man für $x=2$ und $x=3$:

$$l2 = \frac{1}{2}l3 + P_2,\quad l3 = \frac{3}{2}l2 + P_3,$$

folglich $l2 = 2(2P_2 + P_3)$

und $l3 = 2(3P_2 + 2P_3)$.

Die Zahlen P_2 und P_3 lassen sich mit Hülfe der Reihen

$$P_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \ldots\ldots$$

$$P_3 = \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \ldots\ldots$$

ohne große Mühe berechnen.

Sind die natürlichen Logarithmen von 2 und 3 gefunden, so hat man

$$l5 = \frac{l6 + l4}{2} + P_5 = \frac{l3 + 3l2}{2} + P_5$$

$$l7 = \frac{l8 + l6}{2} + P_7 = 2l2 + \frac{1}{2}l3 + P_7$$

und so fort für die übrigen Primzahlen, auf deren Logarithmen es allein ankommt, da die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus denselben durch bloße Addition entstehen.

Verlangt man die Logarithmen in sieben Decimalstellen, so kann man für alle Primzahlen, welche 11 überschreiten:

$$lx = \frac{l(x+1) + l(x-1)}{2} + \frac{1}{2x^2-1},$$

und für alle Primzahlen, welche 2237 überschreiten:

$$lx = \frac{l(x+1) + l(x-1)}{2}$$ setzen.

Es sey in (7) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{x+\delta}{x}$, also $z = \frac{\delta}{2x+\delta}$, so ergibt sich

$$(10)\quad l(x+\delta) = lx + 2\left(\frac{\delta}{2x+\delta} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right)^3 + \ldots\right);$$

und wenn $\delta = 1$ ist:

(11) $l(x+1) = lx + 2\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+1)^3} + \ldots\right)$.

Wir haben bis jetzt bloß natürliche Logarithmen betrachtet. Verlangt man die einer beliebigen Grundzahl b entsprechenden Logarithmen, so hat man nur die natürlichen mit dem Factor $\frac{1}{lb}$ zu multipliciren. Denn ist z die Zahl, deren Logarithmus für die Grundzahl b gesucht wird, so ist

$$z = b^{log.z},$$

$$\text{also} \quad lz = l(b^{log.z}) = log.z \,.\, lb,$$

$$\text{folglich} \quad log.z = \frac{1}{lb} \,.\, lz.$$

Der Factor $\frac{1}{lb}$ heißt der Modulus des auf die Zahl b gegründeten Logarithmensystems. Der Modulus des gemeinen oder Briggischen Systems, nämlich $\frac{1}{l10}$, ist $= 0{\cdot}4342944819 \ldots$

Da $z = e^{lz}$ ist, so hat man $log.z = lz \,.\, log.e.$

Die Vergleichung dieses Resultates mit dem obigen gibt

$$\frac{1}{lb} = log.e.$$

Nennt man den Modulus des Briggischen Systems m, so kann man vermög (10) und (11) für alle Zahlen, welche 1000 überschreiten, auf 6, und für diejenigen, welche 10000 überschreiten, auf 7 Decimalstellen genau

$$log.(x+1) = log.x + 2m \,.\, \frac{1}{2x+1},$$

und, wenn $\delta < 1$ ist, um so mehr

$$log.(x+\delta) = log.x + 2m \,.\, \frac{\delta}{2x+1}$$

setzen. Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$log.(x+\delta) = log.x + \delta\,[log.(x+1) - log.x],$$

aus welcher Formel das gewöhnliche Verfahren, die Logarithmen der Zahlen, welche die Grenzen einer Tafel überschreiten, mittelst der sogenannten Proportional-Theile zu berechnen, von selbst erhellet.

Neunte Vorlesung.

Über die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

So wie eine Größe näherungsweise durch eine unendliche Reihe von Theilen dargestellt werden kann, ist es auch möglich dieselbe durch ein Product unendlich vieler Factoren auszudrücken. Hiezu wird nur erfordert, daß dieses Product, wenn man in der Multiplication der Factoren ohne Ende fortschreitet, sich einer bestimmten Grenze unendlich nähere, welche Eigenschaft wir die Convergenz desselben nennen wollen.

Die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Folge von Factoren läßt sich auf die für unendliche Reihen ertheilten Vorschriften zurückführen.

Es seyen nämlich

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ldots u_n,\ u_{n+1} \ldots\ldots$$

die Factoren, um deren Product

$$(1) \qquad u_0 u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots u_n u_{n+1} \ldots\ldots\ldots \text{ꝛc.}$$

es sich handelt, so können wir dieselben, in so fern wir vom Zeichen des Productes abstrahiren, als positive Größen betrachten. Ist nun e die bekannte Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, so haben wir

$$u_0 = e^{l u_0},\quad u_1 = e^{l u_1},\quad u_2 = e^{l u_2} \text{ ꝛc., also}$$

$$u_0 u_1 u_2 \ldots\ldots u_n u_{n+1} \ldots\ldots = e^{l u_0 + l u_1 + l u_2 + \ldots + l u_n + l u_{n+1} + \ldots}$$

Convergirt die unendliche Reihe

$$(2) \qquad l u_0 + l u_1 + l u_2 + l u_3 + \ldots\ldots + l u_n + l u_{n+1} + \ldots\ldots,$$

und ist s ihre Summe, so kann man, wenn n unendlich wächst,

$$lim.\,(u_0 u_1 u_2 u_3 \ldots u_n) = e^{lim.\,(l u_0 + l u_1 + l u_2 + \ldots + l u_n)} = e^s,$$

also auch $\quad u_0 u_1 u_2 u_3 \ldots u_n u_{n+1} \ldots\ldots = e^s \quad$ setzen.

Hiebei ist e^s nothwendig von 0 verschieden.

Divergirt hingegen die unendliche Reihe (2), indem ihre Summe, je mehr Glieder man addirt, um so größer wird, so kömmt es auf das Zeichen an, welches diese Summe bei ihrem unendlichen Wachsen annimmt. Wird, um uns kurz auszudrücken:

$$l u_0 + l u_1 + l u_2 + l u_3 + \text{ꝛc.} = +\infty,$$

so wird auch $e^\infty = \infty$, und das Product (1) divergirt.

Wird aber

$$lu_0 + lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots \text{ic.} = -\infty,$$

so wird $\quad e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0,$

und daher auch

$$u_0 u_1 u_2 u_3 \ldots . u_n u_{n+1} \ldots . = 0.$$

Wir wollen nun diese Fälle näher betrachten.

Soll die unendliche Reihe (2) convergiren, so muß die Ergänzung Q_n zur Summe ihrer n ersten Glieder bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich abnehmen. (Vierte Vorlesung.) Allein

$$Q_n = lu_n + lu_{n+1} + lu_{n+2} + lu_{n+3} + \ldots .$$

kann in diesem Falle nicht unendlich abnehmen, wenn nicht lu_n bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich klein wird; und damit dieses Statt finde, muß

$$lim. (u_n) = 1$$

seyn, jedoch ist die Convergenz des Productes (1) keinesweges eine nothwendige Folge der Erfüllung dieser Bedingung.

Um die Beschaffenheit von Q_n bei dem unendlichen Wachsen von n beurtheilen zu können, löse man jedes der Glieder, aus denen Q_n besteht, mit Hülfe der in der vorhergehenden Vorlesung entwickelten Formeln in eine convergirende Reihe auf, und untersuche die Beschaffenheit der hieraus entspringenden Doppelreihe. Man wird zu diesem Zwecke die Größen

$$u_n, \; u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; u_{n+3} \ldots\ldots,$$

falls sie die unmittelbare Anwendung der erwähnten Formeln nicht gestatten, auf die Formen

$$1 + v_n, \; 1 + v_{n+1}, \; 1 + v_{n+2}, \; 1 + v_{n+3} \ldots .$$

zu bringen suchen, wobei $v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3} \ldots$ Größen anzeigen, welche, wenn n unendlich groß wird, unendlich abnehmen.

Dann ist

$$lu_n, = v_n - \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_n^3}{3} - \frac{v_n^4}{4} + \text{ic.}$$

$$lu_{n+1} = v_{n+1} - \frac{v_{n+1}^2}{2} + \frac{v_{n+1}^3}{3} - \frac{v_{n+1}^4}{4} + \text{ic.}$$

$$lu_{n+2} = v_{n+2} - \frac{v_{n+2}^2}{2} + \frac{v_{n+2}^3}{3} - \frac{v_{n+2}^4}{4} + \text{ic.}$$

u. s. w.;

folglich, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots &= V_1 \\ v_n^2 + v_{n+1}^2 + v_{n+2}^2 + \ldots &= V_2 \\ v_n^3 + v_{n+1}^3 + v_{n+2}^3 + \ldots &= V_3 \\ v_n^4 + v_{n+1}^4 + v_{n+2}^4 + \ldots &= V_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

setzt:

$$Q_n = V_1 - \frac{V_2}{2} + \frac{V_3}{3} - \frac{V_4}{4} + \text{etc.}$$

Aus der Form der durch V_1, V_2, V_3, V_4 etc. vorgestellten Summen erhellet, daß wenn V_1 unendlich klein wird, um so mehr V_3, V_5, V_7 .... unendlich klein werden, und wenn V_2 unendlich abnimmt, dieß auch bei V_2, V_4, V_6 .... Statt findet. Aus der unendlichen Abnahme von V_1 kann man aber auf das unendlich klein Werden von V_2 nur dann schließen, wenn alle Glieder in V_1 einerlei Zeichen haben, oder wenn V_1 unendlich klein bleibt, obgleich man allen Gliedern einerlei Zeichen ertheilt.

Nimmt V_1 wie auch V_2 unendlich ab, indem n unendlich wächst, so wird also auch Q_n unendlich klein, und das Product (1) convergirt. Die Grenze desselben ist von o verschieden.

Nimmt V_1 bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich ab, und wird zugleich V_2 unendlich groß, so wächst Q_n unendlich und wird negativ. In diesem Falle nähert sich das Product (1) ohne Ende der Nulle.

Dasselbe findet Statt, wenn V_1 bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich groß und negativ wird.

Die Größen V_1 und V_2 sind die auf die Glieder v_{n-1} und v_{n-1}^2 folgenden Ergänzungen der unendlichen Reihen

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \ldots\ldots$$
$$v_0^2,\ v_1^2,\ v_2^2,\ v_3^2 \ldots\ldots$$

oder der Reihen

$$u_0 - 1,\quad u_1 - 1,\quad u_2 - 1,\quad u_3 - 1 \quad \ldots\ldots,$$
$$(u_0 - 1)^2,\ (u_1 - 1)^2,\ (u_2 - 1)^2,\ (u_3 - 1)^2 \ldots\ldots$$

und von dem unendlichen Abnehmen oder Wachsen dieser Ergänzungen bei dem unendlichen Wachsen des Zeigers n hängt die Convergenz oder Divergenz der erwähnten Reihen ab.

Wir sind nun im Stande, über das Verhalten eines Productes bei dem unendlichen Fortschreiten seiner Factoren folgende Regel aufzustellen:

Das Product

$$u_0 u_1 u_2 u_3 \ldots u_n u_{n+1} \ldots \text{ic.},$$

dessen Factoren u_0, u_1, u_2 .... positive Größen sind, nähert sich ohne Ende einer von o verschiedenen Grenze, wenn die Reihen,

$$u_0 - 1, \quad u_1 - 1, \quad u_2 - 1, \quad u_3 - 1, \ldots\ldots$$

und $(u_0 - 1)^2$, $(u_1 - 1)^2$, $(u_2 - 1)^2$, $(u_3 - 1)^2$ .....

zugleich convergiren; diese Grenze ist $= 0$, wenn die zweite Reihe divergirt, während die erste convergirt, oder wenn die erste Reihe divergirt und zugleich die unendlich anwachsende Summe ihrer Glieder negativ wird; hingegen divergirt dieses Product, wenn die erste Reihe eine unendlich wachsende positive Summe darbietet.

So convergirt z. B. die Factorenfolge

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\ldots,$$

und entspricht einer endlichen Grenze; ferner ist

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots = 0,$$

und die Factorenfolge

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots$$

divergirt.

Wir müssen hier jedoch bemerken, daß man über die Beschaffenheit solcher Producte sehr oft nach den in der sechsten Vorlesung erklärten Regeln entscheiden kann.

Eine in der Analysis sehr wichtige Factorenfolge entspringt bei dem unendlichen Wachsen von n aus dem Ausdrucke

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n \cdot n^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)}$$

oder $\dfrac{1^{z+1}}{z+1} \cdot \dfrac{2^{z+1}}{1^z(z+2)} \cdot \dfrac{3^{z+1}}{2^z(z+3)} \ldots\ldots \dfrac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)}$,

worin n eine ganze positive, z hingegen jede Zahl bedeutet. Den Fall ausgenommen, wenn z eine ganze negative Zahl ist, in welchem unter den Factoren des Nenners o erscheint, nähert sich dieses Product,

je mehr Factoren man mit einander multiplicirt, um so mehr einer bestimmten Grenze. Obschon sich dieser Satz mittelst der so eben aufgestellten Regel und der in der sechsten Vorlesung vorgetragenen Sätze beweisen ließe, so kommen wir doch leichter zum Ziele, wenn wir die am Eingange dieser Vorlesung angezeigte allgemeine Methode zu Hülfe nehmen.

Hier ist nämlich:

$$Q_z = l\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)} + l\frac{(n+1)^{z+1}}{n^z(z+n+1)} + l\frac{(n+2)^{z+1}}{(n+1)^z(z+n+2)} + \text{etc.}$$

Nun hat man

$$l\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)} = l\left(\frac{n}{n-1}\right)^z + l\left(\frac{n}{z+n}\right) = -zl\left(\frac{n-1}{n}\right) - l\left(\frac{n+z}{n}\right)$$
$$= -zl\left(1-\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{z}{n}\right),$$

und nach den Formeln (6) und (5) der vorhergehenden Vorlesung, wenn $n > z$ ist:

$$-zl\left(1-\frac{1}{n}\right) = z\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} + \ldots\right)$$
$$l\left(1+\frac{z}{n}\right) = \frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} - \frac{z^4}{4n^4} + \ldots;$$

daher ist:

$$l\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)} = z\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{z^2}{2n^2} - \frac{z^3}{3n^3} + \frac{z^4}{4n^4} - \ldots$$

Die Summe der ersten Reihe ist kleiner als

$$\frac{z}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) = \frac{z}{2n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{z}{2n(n-1)},$$

d. h. kleiner als $\frac{z}{2(n-1)^2}$, und die Summe der zweiten ist kleiner als $\frac{z^2}{2n^2}$; daher ist

$$l\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)} < \frac{z}{2(n-1)^2} + \frac{z^2}{2n^2}.$$

Aus demselben Grunde findet man, wenn man $n+1$, $n+2$ u. s. w. statt n setzt:

$$l\,\frac{(n+1)^{z+1}}{n^z(z+n+1)} < \frac{z}{2n^2} + \frac{z^2}{2(n+1)^2}$$

$$l\,\frac{(n+2)^{z+1}}{(n+1)^z(z+n+2)} < \frac{z}{2(n+1)^2} + \frac{z^2}{2(n+2)^2}$$

u. s. w.,

also $$Q_n < \frac{z}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right),$$

oder $$Q_n < \frac{z(1+z)}{2}\left[\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right].$$

Die Reihe innerhalb der Klammern ist die auf das Glied $\frac{1}{(n-2)^2}$ folgende Ergänzung der convergirenden Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots,$$

und wird daher bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich klein, folglich gilt auch dasselbe von Q_n.

Es ist demnach, wenn n unendlich groß wird,

$$lim.\ \frac{1.2.3\ldots\ldots n.n^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots\ldots(z+n)}$$

eine von 0 verschiedene, übrigens aber von z abhängende Größe, welche wir mit Gauß durch $\Pi(z)$ bezeichnen wollen, wobei Π als Functionszeichen gebraucht wird.

Die Function $\Pi(z)$ läßt sich für jeden gegebenen Werth von z, welcher keine ganze negative Zahl ist, mittelst der Logarithmen berechnen. Hiebei kann man auf die folgenden Bemerkungen Rücksicht nehmen:

Es ist

$$lim.\ \frac{1.2.3\ldots\ldots n.n^z}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} = \frac{1}{z+1}\,lim.\ \frac{1.2.3\ldots\ldots n.n^{z+1}}{(z+2)(z+3)\ldots(z+n+1)},$$

weil der hinzugefügte Factor

$$\frac{n}{z+n+1} = \frac{1}{1+\frac{z+1}{n}}$$

bei dem unendlichen Wachsen von n die Einheit zur Grenze hat, folglich besteht die Gleichung

$$\Pi(z) = \frac{\Pi(z+1)}{z+1}, \text{ oder}$$

$$\Pi(z+1) = (z+1)\,\Pi(z). \tag{3}$$

Es ist demnach für jede ganze positive Zahl m:

$$(4)\quad \Pi(z+m) = (z+1)(z+2)(z+3)\ldots\ldots(z+m)\,\Pi(z).$$

Diese Gleichung zeigt, daß es hinreicht, alle Werthe von $\Pi(z)$, von $z=0$ angefangen bis $z=1$ zu kennen, um im Stande zu seyn, jeden andern Werth dieser Function anzugeben.

Da $\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots n\,.\,n^0}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots n} = 1$ ist, so hat man

$\Pi(0) = 1$, folglich ist
$\Pi(1) = 1$
$\Pi(2) = 1\,.\,2$
$\Pi(3) = 1\,.\,2\,.\,3$
$\Pi(4) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$, und allgemein
$\Pi(r) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(r-1)r$,

wenn r eine ganze positive Zahl vorstellt.

Erhält z einen positiven Werth, so ist $\Pi(z)$ positiv; wird aber z negativ angenommen, so ist $\Pi(z)$ positiv oder negativ, je nachdem die größte in z enthaltene ganze Zahl gerade oder ungerade ist, wovon man sich mit Hülfe der Gleichung (3) leicht überzeugt.

Zehnte Vorlesung.

Über die Summirung der Reihe

$$(1)\quad 1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+ \text{rc.}$$

Diese Reihe besitzt die merkwürdige, von Gauß entdeckte Eigenschaft, daß sich die Summe derselben, wenn nämlich die Reihe abbricht oder convergirt, durch Größen von der in der vorhergehenden Vorlesung betrachteten Form $\Pi(z)$ ausdrücken läßt. Ehe wir zum Beweise dieser Behauptung schreiten, wollen wir die Reihe

$$(2)\quad 1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+ \text{rc.}$$

betrachten, aus welcher die oben angeführte entspringt, wenn man $x=1$ setzt.

Ist die Reihe (2) unbegrenzt, ohne durch Glieder, deren Nenner $=0$ sind, eine Störung zu erleiden, so convergirt sie, wenn x einen zwischen die Grenzen -1 und $+1$ fallenden Werth erhält, weil die Grenze, der sich der Quotient der Coefficienten zweier Nachbarglieder ohne Ende nähert, $=1$ ist.

Die Summe der Reihe (2) hängt von den Werthen ab, welche man den Größen α, β, γ, x ertheilt. Sie werde durch $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ vorgestellt, so daß

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+ \text{rc. ist.}$$

Die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ verdient ihrer Allgemeinheit wegen eine besondere Aufmerksamkeit. Sehr viele der Fundamental-Reihen der Analysis lassen sich durch schickliche Bestimmung von α, β, γ, x auf dieselbe zurückführen. So verwandelt sich $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, wenn man $\alpha=-m$, $\gamma=\beta$ und $-x$ statt x setzt, in die bekannte Reihe für $(1+x)^m$; setzt man $\alpha=\beta=1$, $\gamma=2$, und $-x$ statt x, so erhält man $\frac{l(1+x)}{x}$; setzt man hingegen $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{3}{2}$ und x^2 statt x, so ergibt sich $\frac{1}{2x}\,l\,\frac{1+x}{1-x}$ u. s. w.; d. h. es ist

$$(1+x)^m = F(-m, \beta, \beta, -x)$$
$$l(1+x) = x \,.\, F(1, 1, 2, -x)$$
$$l\,\frac{1+x}{1-x} = 2x.F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right)$$

u. s. w.

Die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ steht mit den Functionen, welche aus ihr entspringen, wenn man die Größen α, β, γ um die Einheit vermehrt und vermindert, in leicht darstellbaren Beziehungen. Wir wollen hier nur diejenigen ableiten, welche zu unserem Zwecke dienen.

Wie aus dem Bildungsgesetze der durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vorgestellten unendlichen Reihe erhellet, ist der Coefficient von x^n in derselben

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

Bezeichnen wir diesen Coefficienten der Kürze wegen durch N, so können wir den Coefficienten von x^n in

$F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$ durch $\frac{\alpha+n}{\alpha}$ N, und in

$F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)$ durch $\frac{\beta+n}{\beta}$ N

ausdrücken; denn es ist

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{(\alpha+1)\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \text{zc.}$$

und

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha(\beta+1)}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,\gamma\,.\,(\gamma+1)}x^2 + \text{zc.}$$

Hieraus folgt für den Coefficienten von x^n in

$$\alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)$$

der Ausdruck $(\alpha-\beta)$ N,

d. h. die Coefficienten von x^n in

$$\alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)$$

und in $(\alpha-\beta)\,F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sind einander gleich.

Was hier von den Coefficienten des Gliedes, in welchem die Potenz x^n erscheint, gesagt wurde, gilt auch von den Coefficienten der übrigen Glieder, also auch von den zugehörigen Functionen. Auf diese Art gelangt man zu der Gleichung:

$$(3)\quad (\beta-\alpha)F(\alpha,\beta,\gamma,x) + \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma,x) - \beta F(\alpha,\beta+1,\gamma,x) = 0.$$

Setzt man ferner die Größe

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-2)\;\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(n-1)n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} = \text{P},$$

so ist der Coefficient von x^n

$$\text{in } F(\alpha, \beta, \gamma, x) \text{ gleich } (\alpha+n-1)P,$$
$$\text{in } F(\alpha-1, \beta, \gamma, x) \ldots\ldots (\alpha-1)P,$$
$$\text{in } F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) \ldots\ldots \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n)}{\beta}P,$$
$$\text{und in } x.F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) \ldots\ldots \frac{n(\gamma+n-1)}{\beta}P.$$

Es ist also der Coefficient von x^n in

$$\beta(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma,x) \text{ gleich } [(\alpha+n-1)(\beta+n)-n(\gamma+n-1)]P,$$
$$\text{oder gleich } [(\alpha+\beta-\gamma)n+\beta(\alpha-1)]P.$$

Aber der Coefficient von x^n in

$$(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha,\beta,\gamma,x) \text{ ist } [(\alpha+\beta-\gamma)n+(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-1)]P;$$

folglich ist der Coefficient dieser Potenz in

$$\beta(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma, x) - (\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$\text{gleich } (\alpha-1)(\gamma-\alpha)P,$$

d. h. gleich dem Coefficienten von x^n in

$$(\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma, x).$$

Hieraus folgt die Gleichung:

$$(4) \quad (\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x) - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x) + \beta(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma,x) = 0.$$

Setzt man endlich die Größe

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-2)\ \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)n.\gamma(\gamma+1)\ldots\ldots(\gamma+n-1)} = Q,$$

so findet man den Coefficienten von x^n

$$\text{in } F(\alpha, \beta, \gamma, x) \text{ gleich } (\alpha+n-1)(\beta+n-1)Q,$$
$$\text{in } xF(\alpha, \beta, \gamma, x) \ldots\ldots\ldots n(\gamma+n-1)Q,$$
$$\text{in } F(\alpha-1,\beta,\gamma,x) \ldots\ldots\ldots (\alpha-1)(\beta+n-1)Q,$$
$$\text{in } xF(\alpha,\beta,\gamma+1,x) \ldots\ldots\ldots \gamma n Q.$$

Es ist also der Coefficient von x^n in

$$(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma,x) \text{ gleich } [(\alpha+\beta-\gamma-1)n+(\alpha-1)(\beta-1)]Q.$$

Aber der Coefficient dieser Potenz in

$$F(\alpha-1, \beta, \gamma, x) \text{ ist } [(\alpha-1)n+(\alpha-1)(\beta-1)]Q;$$

folglich erhält man für den Coefficienten von x^n in

$$(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha-1, \beta, \gamma, x)$$

den Ausdruck $\qquad (\beta-\gamma)nQ$

Da aber dieser Ausdruck den Coefficienten von x^n in

$$\frac{(\beta-\gamma)\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)}{\gamma}$$

vorstellt, so hat man die Gleichung:

$$(5)\quad \gamma(1-x)\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)-\gamma F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)$$
$$+(\gamma-\beta)\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)=0.$$

Multiplicirt man die Gleichung (3) mit $\gamma(1-x)$, die Gleichung (4) mit γ, und die Gleichung (5) mit $\gamma-\alpha$, wodurch man die Gleichungen:

$$\gamma(\beta-\alpha)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\alpha\gamma(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)$$
$$-\beta\gamma(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)=0$$
$$\gamma(\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x)-\gamma(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)$$
$$+\beta\gamma(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)=0$$
$$\gamma(\gamma-\alpha)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma,x)-\gamma(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)=0$$

erhält, und subtrahirt man die beiden ersten derselben von der dritten, so ergibt sich:

$$(6)\quad \gamma\big(\alpha-(\gamma-\beta)x\big)F(\alpha,\beta,\gamma,x)-\alpha\gamma(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)=0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x=1$, und schreiben wir der Kürze wegen $F(\alpha,\beta,\gamma)$ statt $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$, so haben wir, in so fern das Product $(1-x)\,F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)$ verschwindet,

$$\gamma(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha,\beta,\gamma)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma+1)=0$$

oder (7) $F(\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma+1)$.

Die unendliche Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}+\text{etc.}$$

stellt nur dann eine bestimmte Größe dar, wenn sie convergirt, und hiezu wird erfordert, daß $\alpha+\beta-\gamma$ eine negative Zahl sey. Da nun $\alpha+1+\beta-\gamma$ positiv seyn kann, während $\alpha+\beta-\gamma$ negativ ausfällt, so ist es möglich, daß $F(\alpha+1,\beta,\gamma)$ divergirt, während $F(\alpha,\beta,\gamma)$ convergirt. Wir müssen daher noch rechtfertigen, daß es, selbst wenn $F(\alpha+1,\beta,\gamma)$ divergirt, erlaubt ist, das Product $(1-x)\,F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)$ für $x=1$ der Nulle gleich zu setzen.

Wenn man aus einer divergirenden Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ldots\ u_{n-1},\ u_n\ \ldots\ldots,$$

deren Glieder unendlich abnehmen, eine neue Reihe dadurch bildet, daß man jedes Glied derselben von dem darauf folgenden abzieht, so convergirt diese neue Reihe, nämlich:

$$u_0,\ u_1 - u_0,\ u_2 - u_1,\ u_3 - u_2\ \ldots\ldots\ u_n - u_{n-1}\ \ldots\ldots,$$

und ihre Summe ist $=0$.

Denn für sie ist die Summe der $n+1$ Anfangsglieder $= u_n$, welche der Voraussetzung gemäß unendlich abnimmt, wenn n unendlich wächst.

Da $\alpha+1+\beta-\gamma-1=\alpha+\beta-\gamma$ eine negative Zahl ist, so nehmen die Glieder der Reihe $F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma)$ unendlich ab (sechste Vorles. 5)); aber $(1-x)\,F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ geht für $x=1$ in die Reihe der Unterschiede über, welche $F(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma)$ durch Subtraction je zweier Nachbarglieder darbietet, daher ist $(1-x)\,F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$ unter der Annahme $x=1$ der Nulle gleich.

Aus der Gleichung (7) folgt, wenn man nach und nach $\gamma+1$, $\gamma+2$, $\gamma+3\ \ldots\ \gamma+n-1$ statt γ schreibt, und jedes spätere Resultat in das frühere substituirt:

$$(8)\qquad F(\alpha,\ \beta,\ \gamma) =$$

$$= \frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-\alpha+n-1)\,(\gamma-\beta)\,(\gamma-\beta+1)\ldots(\gamma-\beta+n-1)}{\gamma\ .\ (\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,(\gamma-\alpha-\beta)\,(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots(\gamma-\alpha-\beta+n-1)} . F(\alpha, \beta, \gamma+n).$$

Man gebe jeder für sich in arithmetischer Progression fortschreitenden Folge von Factoren den Divisor

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n;$$

ferner theile man den Zähler des obigen Bruches durch

$$n^{\gamma-\alpha-1}\ .\ n^{\gamma-\beta-1},$$

und den Nenner durch

$$n^{\gamma-1}\ .\ n^{\gamma-\alpha-\beta-1},$$

so wird dieser Bruch nicht geändert. Läßt man nun n unendlich groß werden, wobei

$$F(\alpha, \beta, \gamma+n) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\,.\,(\gamma+n)} + \frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{1\ .\ 2\ .\ (\gamma+n)\,(\gamma+n+1)} + \text{ꝛc.}$$

ohne Ende der Einheit, und jede Factorengruppe in dem obigen Bruche

ohne Ende einer Größe von der Form $\frac{1}{\Pi(z)}$ sich nähert, so hat man die Gleichung:

$$(9) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\gamma - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}.$$

Es ist also

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \text{rc.}$$
$$= \frac{\Pi(\gamma - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \beta - 1)},$$

wofür man auch den obigen ohne Ende fortlaufenden Bruch schreiben kann.

Eilfte Vorlesung.

Über die Kettenbrüche.

Unter den Mitteln, welche der Analysis zur näherungsweisen Darstellung der Größen zu Gebote stehen, verdienen noch die sogenannten Kettenbrüche einer Erwähnung.

Ein Kettenbruch entsteht, wenn man mehrere Brüche so unter einander verbindet, daß jeder folgende ein Bestandtheil des Nenners des vorhergehenden wird. Die allgemeine Form eines Kettenbruches, mit Einschluß einer demselben vorangehenden isolirten Zahl k, ist

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \text{ꝛc.}}}}}$$

Die Buchstaben k, a_1, a_2, a_3 ... b_1, b_2, b_3 ... stellen was immer für Größen vor. Die Brüche $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$ ... heißen die Glieder des Kettenbruches. Derselbe ist begrenzt oder unbegrenzt, je nachdem er eine bestimmte Menge von Gliedern zählt, oder in das Unendliche fortschreitet.

Jede gegebene Menge von Gliedern eines Kettenbruches läßt sich nach den Regeln der Arithmetik durch einen gewöhnlichen Bruch ausdrücken. Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem ein solcher Bruch aus den Gliedern des Kettenbruches gebildet wird, wollen wir dieselben stufenweise in die Operation hineinziehen. Es ist

$$k + \frac{a_1}{b_1} = \frac{k b_1 + a_1}{b_1}.$$

Lassen wir hier b_1 in $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$ übergehen, so haben wir

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} = \frac{k\left(b_1 + \frac{a_2}{b_2}\right) + a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{(k b_1 + a_1) b_2 + k a_2}{b_1 b_2 + a_2}.$$

Es sey der Kürze wegen $k b_1 + a_1 = A_1$ und $b_1 = B_1$, so wird

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} = \frac{A_1 b_2 + k a_2}{B_1 b_2 + \ a_2}.$$

Schreiben wir hier $b_2 + \frac{a_3}{b_3}$ statt b_2, so ergibt sich, da A_1 und B_1 von b_2 nicht abhängen:

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}} = \frac{A_1\left(b_2 + \frac{a_3}{b_3}\right) + k a_2}{B_1\left(b_2 + \frac{a_3}{b_3}\right) + a_2}$$

$$= \frac{(A_1 b_2 + k a_2) b_3 + A_1 a_3}{(B_1 b_2 + a_2) b_3 + B_1 a_3};$$

oder, wenn wir $A_1 b_2 + k a_2 = A_2$ und $B_1 b_2 + a_2 = B_2$ setzen:

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}} = \frac{A_2 b_3 + A_1 a_3}{B_2 b_3 + B_1 a_3}.$$

Auf dieselbe Art findet man durch Verwandlung von b_3 in $b_3 + \frac{a_4}{b_4}$:

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4}}}} = \frac{A_2\left(b_3 + \frac{a_4}{b_4}\right) + A_1 a_3}{B_2\left(b_3 + \frac{a_4}{b_4}\right) + B_1 a_3} = \frac{(A_2 b_3 + A_1 a_3) b_4 + A_2 a_4}{(B_2 b_3 + B_1 a_3) b_4 + B_2 a_4}$$

$$= \frac{A_3 b_4 + A_2 a_4}{B_3 b_4 + B_2 a_4},$$

wenn man nämlich $A_2 b_3 + A_1 a_3 = A_3$ und $B_2 b_3 + B_1 a_3 = B_3$ setzt. Da der Gang dieser Rechnung, wie weit man sie auch immer fortführen mag, unveränderlich der nämliche bleibt, so haben wir, wenn wir

$$\begin{array}{ll}
A_0 = k & B_0 = 1 \\
A_1 = A_0 b_1 + 1 \cdot a_1 & B_1 = B_0 b_1 + 0 \cdot a_1 \\
A_2 = A_1 b_2 + A_0 a_2 & B_2 = B_1 b_2 + B_0 a_2 \\
A_3 = A_2 b_3 + A_1 a_3 & B_3 = B_2 b_3 + B_1 a_3 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
A_n = A_{n-1} b_n + A_{n-2} a_n & B_n = B_{n-1} b_n + B_{n-2} a_n
\end{array}$$

setzen:

$$k = \frac{A_0}{B_0}, \quad k + \frac{a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1}, \quad k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} = \frac{A_2}{B_2},$$

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}} = \frac{A_3}{B_3} \text{ u. s. w.,}$$

und allgemein

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \text{rc.} \atop + \frac{a_n}{b_n}}}} = \frac{A_n}{B_n}.$$

Nach diesen Formeln wird man die Reduction eines Kettenbruches auf einen gewöhnlichen Bruch ohne Schwierigkeit vornehmen.

Wir wollen die Brüche $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3} \ldots$ die auf einander folgenden reducirten Werthe des zugehörigen Kettenbruches nennen.

Untersuchen wir nun die Unterschiede je zweier dieser reducirten Werthe.

Es ist

$$\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{B_0 B_1} = \frac{k b_1 + a_1 - k b_1}{B_0 B_1} = \frac{a_1}{B_1}$$

$$\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1 B_2} = \frac{(A_1 b_2 + A_0 a_2) B_1 - A_1 (B_1 b_2 + B_0 a_2)}{B_1 B_2}$$

$$= - \frac{(A_1 B_0 - A_0 B_1) a_2}{B_1 B_2} = - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2}$$

$$\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{B_2 B_3} = \frac{(A_2 b_3 + A_1 a_3) B_2 - A_2 (B_2 b_3 + B_1 a_3)}{B_2 B_3}$$

$$= - \frac{(A_2 B_1 - A_1 B_2) a_3}{B_2 B_3} = + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3}.$$

Eben so findet man $\frac{A_4}{B_4} - \frac{A_3}{B_3} = - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4}$,

und allgemein

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

Da

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) + \left(\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_2}{B_2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}\right) + \left(\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right)$$

ist, so setzen uns die so eben entwickelten Formeln in den Stand, den Werth eines Kettenbruches bis zu jedem beliebigen Gliede durch eine Reihe auszudrücken. Es ist nämlich

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}} =$$

$$= k + \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n},$$

und daher der ohne Ende fortschreitende Kettenbruch

$$k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \text{etc.}}}}$$

der unendlichen Reihe

$$k + \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4} + \text{etc.}$$

Glied für Glied gleich geltend.

Ist umgekehrt eine endliche oder unendliche Reihe

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots$$

gegeben, so kann dieselbe in einen ihr Glied für Glied correspondirenden Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \text{etc.}}}}}$$

verwandelt werden.

Denn setzt man

$$u_1 = \frac{a_1}{B_1},\ u_2 = \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2},\ u_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3},\ u_4 = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4},\ \ldots,$$

so ergibt sich

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2}{B_2},\quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{a_3 B_1}{B_3},\quad \frac{u_4}{u_3} = \frac{a_4 B_2}{B_4},\ \ldots;$$

und da

$B_1 = b_1$, $B_2 = B_1 b_2 + a_2$, $B_3 = B_2 b_3 + B_1 a_3$, $B_4 = B_3 b_4 + B_2 a_4$

ist u. s. w., so findet man:

$$a_1 = u_1 b_1;\ \text{ferner wegen}\ u_2 B_2 = u_1 a_2$$

$$u_2 (b_1 b_2 + a_2) = u_1 a_2,\ \text{also}$$

$$a_2 = \frac{u_2 b_1 b_2}{u_1 - u_2}.$$

Eben so gibt die Gleichung $u_3 B_3 = u_2 a_3 B_1$

$$u_3 (B_2 b_3 + B_1 a_3) = u_2 a_3 B_1,$$

also $a_3 = \frac{u_3 b_3 B_2}{(u_2 - u_3) B_1}$.

Nun ist $\frac{B_2}{B_1} = b_2 + \frac{a_2}{b_1} = b_2 + \frac{u_2 b_2}{u_1 - u_2} = \frac{u_1 b_2}{u_1 - u_2}$,

folglich $a_3 = \frac{u_1 u_3 b_2 b_3}{(u_1 - u_2)(u_2 - u_3)}$.

Aus der Gleichung $u_4 B_4 = u_3 a_4 B_2$ oder

$$u_4 (B_3 b_4 + B_2 a_4) = u_3 a_4 B_2$$

erhält man $a_4 = \frac{u_4 b_4 B_3}{(u_3 - u_4) B_2}$.

Aber es ist $\frac{B_3}{B_2} = b_3 + \frac{B_1 a_3}{B_2}$

und $\frac{B_1 a_3}{B_2} = \frac{u_3 b_3}{u_2 - u_3}$,

folglich $a_4 = \frac{u_2 u_4 b_3 b_4}{(u_2 - u_3)(u_3 - u_4)}$

u. s. w., wodurch der weitere Verlauf der Rechnung deutlich vor Augen liegt.

In den hier gefundenen Ausdrücken für $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots$ sind die Werthe von $b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots\ldots$ unbestimmt, und deßhalb willkürlich. Diese Größen können, wenn man die Werthe von $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots$ in dem Kettenbruche

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \text{rc.}}}}$$

substituirt, aus demselben durch das Abkürzen der Brüche weggeschafft werden. Diese Operation, so wie die noch nöthige Reduction der Glieder des Kettenbruches auf die einfachste Gestalt, erspart man, wenn man $b_1 = 1$, $b_2 = u_1 - u_2$, $b_3 = u_2 - u_3$, $b_4 = u_3 - u_4$, ... annimmt, wodurch

$$a_1 = u_1, \quad a_2 = u_2, \quad a_3 = u_1 u_3, \quad a_4 = u_2 u_4, \ldots$$

wird, und man sogleich

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{u_1}{1 + \frac{u_2}{u_1 - u_2 + \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3 + \frac{u_2 u_4}{u_3 - u_4 + \text{rc.}}}}}$$

erhält.

Die Umstaltung der Reihe $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots$ in diesen Kettenbruch läßt sich auf folgende Art unmittelbar bewerkstelligen.

Es sey

$$x_1 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots$$
$$x_2 = u_2 - u_3 + u_4 - \ldots\ldots$$
$$x_3 = u_3 - u_4 + \ldots\ldots$$

u. s. w.,

so ist

$$x_1 = u_1 - x_2 = u_1\left(1 - \frac{x_2}{u_1}\right) = \frac{u_1}{\dfrac{1}{1 - \dfrac{x_2}{u_1}}}$$

$$= \cfrac{u_1}{1 + \cfrac{x_2}{u_1 - x_2}},$$

ferner

$$\frac{x_2}{u_1 - x_2} = \frac{1}{-1 + \dfrac{u_1}{x_2}} = \frac{u_2}{-u_2 + u_1 \cdot \dfrac{u_2}{x_2}}$$

und

$$\frac{u_2}{x_2} = \frac{u_2}{u_2 - x_3} = 1 + \frac{x_3}{u_2 - x_3};$$

daher

$$\frac{x_2}{u_1 - x_2} = \cfrac{u_2}{u_1 - u_2 + \cfrac{u_1 x_3}{u_2 - x_3}}.$$

Auf dieselbe Art findet man

$$\frac{x_3}{u_2 - x_3} = \cfrac{u_3}{u_2 - u_3 + \cfrac{u_2 x_4}{u_3 - x_4}}$$

u. s. w., daher hat man nach gehöriger Substitution

$$x_1 = \cfrac{u_1}{1 + \cfrac{u_2}{u_1 - u_2 + \cfrac{u_1 u_3}{u_2 - u_3 + \text{ꝛc.}}}}$$

wie oben.

Schreibt man hier $\frac{1}{u_1}$, $\frac{1}{u_2}$, $\frac{1}{u_3}$, $\frac{1}{u_4}\ldots\ldots$,

oder auch $\frac{1}{u_1}$, $\frac{1}{u_1 u_2}$, $\frac{1}{u_1 u_2 u_3}$, $\frac{1}{u_1 u_2 u_3 u_4}\ldots\ldots$

statt u_1, u_2, u_3, $u_4\ldots\ldots$,

so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_4} + \ldots\ldots =$$

$$= \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{u_1^2}{u_2 - u_1 + \cfrac{u_2^2}{u_3 - u_2 + \cfrac{u_3^2}{u_4 - u_3 + \text{ꝛc.}}}}}$$

und $\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_1 u_2 u_3} - \frac{1}{u_1 u_2 u_3 u_4} + \text{etc.} =$

$$= \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{u_1}{u_2 - 1 + \cfrac{u_2}{u_3 - 1 + \cfrac{u_3}{u_4 - 1 + \text{etc.}}}}}$$

Da die hier angeführten Kettenbrüche, den Reihen, aus welchen sie abgeleitet worden sind, Glied für Glied correspondiren, so kann man die Convergenz oder Divergenz der Kettenbrüche nach der Beschaffenheit dieser Reihen beurtheilen.

Zwölfte Vorlesung.

Über die Kettenbrüche.

(Fortsetzung.)

Um die Mannigfaltigkeit der Kunstgriffe anschaulich zu machen, welche sich bei der Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche anbringen lassen, wollen wir, unter der Voraussetzung, daß $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Summe der Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{ic.}$$

im Falle ihres Abbrechens oder ihrer Convergenz bezeichne, den Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

nach Gauß in einen Kettenbruch umstalten.

Setzen wir den Coefficienten von x^n in $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, nämlich

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)} = N,$$

so ist der Coefficient von x^n in $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$

$$= N . \frac{\gamma(\beta+n)}{\beta(\gamma+n)};$$

folglich der Coefficient von x^n in der Differenz

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

$$= N\left[\frac{\gamma(\beta+n)}{\beta(\gamma+n)} - 1\right] = N . \frac{(\gamma-\beta)n}{\beta(\gamma+n)}.$$

Es ist aber $N . \frac{\gamma(\gamma+1).n}{\alpha\beta(\gamma+n)}$ der Coefficient von x^n in der Reihe $x.F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)$, daher besteht die Gleichung:

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) - F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x),$$

aus welcher

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)} = 1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x . \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}$$

oder

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}}$$

folgt. Setzen wir

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = f(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

so wird, da wegen $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x)$

$$\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)} = \frac{F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x)}{F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}$$
$$= f(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x) \text{ ist,}$$

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x f(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}.$$

Diese Gleichung gibt, wenn man α, β, γ mit $\beta+1, \alpha, \gamma+1$ vertauscht:

$$f(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x) = \cfrac{1}{1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)},$$

so, daß $f(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch $f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)$ ausgedrückt werden kann. Führt man eben so $f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)$ auf $f(\alpha+2, \beta+2, \gamma+4, x)$ zurück ꝛc., so erhält man den Kettenbruch

$$(1) \quad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \cfrac{a_3 x}{1 - \cfrac{a_4 x}{1 - \text{ꝛc.},}}}}}$$

wobei, wie man leicht sieht:

$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad a_2 = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$
$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \qquad a_4 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}$$
$$a_5 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}, \qquad a_6 = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}$$

u. s. w. ist.

Der Kettenbruch ist begrenzt, wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ ganz und negativ angenommen wird; sonst aber ist er unbegrenzt.

Für $\beta = 0$ reducirt sich die durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vorgestellte Reihe auf ihr erstes Glied 1, daher hat man, wenn man in der Formel (1) $\gamma-1$ statt γ schreibt:

$$(2)\quad F(\alpha, 1, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \cfrac{a_3 x}{1 - \cfrac{a_4 x}{1 - \text{etc.}}}}}},$$

wobei $a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\quad a_2 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma+1)}$

$$a_3 = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \quad a_4 = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}$$

$$a_5 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}, \quad a_6 = \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}$$

u. s. w. ist.

Die Reihe

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \text{etc.}$$

geht in $(1+x)^m$ über, wenn man $-m$ statt α, 1 statt γ, und $-x$ statt x setzt. Wir haben daher

$$(1+x)^m = \cfrac{1}{1 - \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{m+1}{1\,.\,2}x}{1 - \cfrac{\frac{m-1}{2\,.\,3}x}{1 + \cfrac{\frac{2(m+2)}{3\,.\,4}x}{1 - \cfrac{\frac{2(m-2)}{4\,.\,5}x}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}(m+1)x}{1 - \cfrac{\frac{1}{6}(m-1)x}{1 + \cfrac{\frac{1}{6}(m+2)x}{1 - \cfrac{\frac{1}{10}(m-2)x}{1 + \cfrac{\frac{1}{10}(m+3)x}{1 - \text{etc.}}}}}}}}$$

Diese Formel bricht ab, wenn der Exponent m eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Man kann derselben noch eine andere Gestalt geben. Es folgt nämlich aus ihr

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = 1 - \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}(m+1)x}{1 - \cfrac{\frac{1}{6}(m-1)x}{1 + \text{etc.}}}};$$

und daher, wenn man das Zeichen von m ändert:

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{\frac{1}{2}(m-1)x}{1 + \cfrac{\frac{1}{6}(m+1)x}{1 - \text{etc.}}}}$$

Da der Ausdruck $\frac{(1+x)^m - 1}{m}$ bei der unendlichen Abnahme von m den natürlichen Logarithmus von $1+x$ zur Grenze hat, so ergibt sich:

$$l(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{14}x}{1+\text{ic.}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{2+\cfrac{3x}{7+\cfrac{4x}{2+\text{ic.}}}}}}}}}$$

Hingegen geht $(1+\omega)^{\frac{x}{\omega}}$ bei dem unendlichen Abnehmen von ω in e^x über, daher hat man

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1-\cfrac{\frac{1}{10}x}{1+\text{ic.}}}}}}}$$

$$= 1+\cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{1}{10}x}{1-\text{ic.}}}}}}$$

Wenn der Kettenbruch, welcher aus einer Reihe abgeleitet wurde, derselben nicht Glied für Glied correspondirt, so steht die Convergenz oder Divergenz des Kettenbruches mit der Beschaffenheit der Reihe in keinem nothwendigen Zusammenhange. In diesem Falle, welcher bei den so eben entwickelten Kettenbrüchen Statt findet, muß die Convergenz des Kettenbruches besonders untersucht werden. Man könnte zwar denselben nach der in der vorhergehenden Vorlesung ertheilten Anweisung in eine ihm gliedweise entsprechende Reihe umstalten; allein nur selten wird man im Stande seyn, das Bildungsgesetz dieser Reihe unter einer solchen Form darzustellen, daß die zur Beurtheilung der Convergenz der Reihen gegebenen Regeln angewendet werden können. Selbst wenn die Glieder eines Kettenbruches

$$k+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\text{ic.}}}}$$

sämmtlich positiv sind, also der Werth desselben immer zwischen die Grenzen k und $k+\frac{a_1}{b_1}$ fällt, und daher keines unendlichen Wach-

sens fähig ist; ferner in der diesem Kettenbruche gliedweise correspondirenden Reihe

$$k + \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4} + \text{ꝛc.}$$

die Zeichen wechseln, und die numerischen Werthe der Glieder ununterbrochen fort abnehmen, da das n^{te} dieser Glieder, $\frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}$ aus dem $(n-1)^{ten}$ $\frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1}}{B_{n-2} B_{n-1}}$ durch Multiplication des letztern mit dem die Einheit nie erreichenden Factor

$$\frac{B_{n-2} a_n}{B_n} = \frac{B_{n-2} a_n}{B_{n-1} b_n + B_{n-2} a_n} = \frac{1}{\frac{B_{n-1} b_n}{B_{n-2} a_n} + 1}$$

entsteht: selbst dann noch hängt die Convergenz des Kettenbruches von dem Umstande ab, ob die Größe

$$\frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}$$

bei dem unendlichen Wachsen des Zeigers n unendlich abnimmt, oder einer von o verschiedenen Grenze sich nähert. Tritt der letztere Umstand ein, so ist der Werth des Kettenbruches schwankend und daher für divergirend zu halten. Als Beispiel diene der mit der Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \text{ꝛc.}$$

gliedweise übereinstimmende Kettenbruch

$$\cfrac{2}{1 + \cfrac{1^3 . 3}{1 + \cfrac{2^3 . 4}{1 + \cfrac{3^3 . 5}{1 + \cfrac{4^3 . 6}{1 + \text{ꝛc.}}}}}}$$

Werden die Zähler $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ zuletzt positiv und nicht größer als 1, und die Nenner $b_1, b_2, b_3 \ldots$ positiv und nicht kleiner als 1, so unterliegt die unendliche Abnahme des Bruches $\frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}$ bei dem unendlichen Wachsen von n keinem Zweifel. Es muß also der oben für $l(1+x)$ gegebene Kettenbruch, wenigstens so lange x zwischen o und 4 liegt, und der für e^x gegebene, bei jedem Werthe von x convergiren.

Um zu entscheiden, mit welcher Genauigkeit die reducirten Werthe $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3} \ldots \frac{A_n}{B_n} \ldots$ den Totalwerth z eines convergirenden Kettenbruches darstellen, muß man den Unterschied $z - \frac{A_n}{B_n}$ in Erwägung ziehen.

Es sey $z = k + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n + z_n}}}$,

wobei z_n den auf den Nenner b_n folgenden Rest des Kettenbruches anzeigt, so geht $\frac{A_n}{B_n}$ in z über, wenn man $b_n + z_n$ statt b_n setzt. Da nun

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-1}\, b_n + A_{n-2}\, a_n}{B_{n-1}\, b_n + B_{n-2}\, a_n}$$

ist, und A_{n-1}, A_{n-2}, B_{n-1}, B_{n-2} die Zahl b_n nicht enthalten, so folgt

$$z = \frac{A_{n-1}\,(b_n + z_n) + A_{n-2}\, a_n}{B_{n-1}\,(b_n + z_n) + B_{n-2}\, a_n} = \frac{A_n + A_{n-1}\, z_n}{B_n + B_{n-1}\, z_n}$$

und

$$z - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(A_{n-1}\, B_n - A_n\, B_{n-1})\, z_n}{B_n\,(B_n + B_{n-1}\, z_n)} = \frac{(-1)^n\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n\, z_n}{B_n\,(B_n + B_{n-1}\, z_n)}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_n\left(\frac{B_n}{z_n} + B_{n-1}\right)}.$$

Lassen sich zwei Grenzen ζ_n und $\zeta_n + \delta_n$ angeben, zwischen welche z_n fällt, so liegt $z - \frac{A_n}{B_n}$ zwischen den Grenzen

$$\frac{(-1)^n\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_n\left(\frac{B_n}{\zeta_n} + B_{n-1}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{(-1)^n\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_n\left(\frac{B_n}{\zeta_n + \delta_n} + B_{n-1}\right)}.$$

Man wird daher über $z - \frac{A_n}{B_n}$ um so zuverläßiger urtheilen, je kleiner δ_n ist.

Um $z - \frac{A_n}{B_n}$ bequem mit $z - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ vergleichen zu können,

bestimme man $z - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ mit Hülfe des obigen Ausdruckes für z. Man findet

$$z - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n}{B_{n-1}(B_n + B_{n-1} z_n)}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{B_{n-1}(B_n + B_{n-1} z_n)},$$

folglich $$\frac{z - \frac{A_n}{B_n}}{z - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}} = -\frac{B_{n-1}}{B_n} \cdot z_n.$$

Der allgemeinen Anwendbarkeit dieser Formeln steht die Schwierigkeit im Wege, die Formation der Zahlen B_{n-1}, B_n zu übersehen, so daß die Regeln, welche wir daraus für die Convergenz der Kettenbrüche ableiten können, von zu beschränktem Umfange sind, als daß sie verdienten hier aus einander gesetzt zu werden. Es ist daher zu wünschen, daß die Analysten diesen noch nicht gehörig bearbeiteten Gegenstand einer aufmerksameren Prüfung unterziehen möchten.

Dreizehnte Vorlesung.

Über die Kettenbrüche, deren Zähler = 1, und deren Nenner ganze Zahlen sind.

Vorzüglich merkwürdig und wichtig sind die Kettenbrüche, deren allgemeine Form

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \text{rc.}}}}$$

ist, wobei k_0, k_1, k_2, k_3 .... ganze positive oder negative Zahlen vorstellen.

Man kommt auf Kettenbrüche dieser Form, sobald man eine Größe, welche durch keine ganze Zahl dargestellt werden kann, näherungsweise auf ganze Zahlen zurückzuführen sucht. Es sey x die Zahl, welche eine solche Größe ausdrückt, so liegt x zwischen zwei bloß um 1 verschiedenen ganzen Zahlen h und $h+1$, wovon eine auch $=0$ seyn kann. Ist k_0 eine derselben, so ist der numerische Werth der Differenz

$$x - k_0 < 1,$$

$$\text{folglich } \frac{1}{x-k_0} > 1.$$

Es sey $\frac{1}{x-k_0} = x_1$, so ist $x_1 > 1$. Stellt nun k_1 eine der beiden ganzen Zahlen vor, zwischen welche x_1 fällt, deren keine $=0$ seyn kann, so ist ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$x_1 - k_1 < 1,$$

folglich, wenn man $\frac{1}{x_1-k_1} = x_2$ setzt, $x_2 > 1$.

Es sey wieder k_2 eine der beiden ganzen Zahlen, welchen x_2 am nächsten liegt, so ist ebenfalls $x_2 - k_2 < 1$ und $\frac{1}{x_2-k_2}$ oder $x_3 > 1$. Auf dieselbe Art ist, wenn x_3 zwischen k_3 und $k_3 \pm 1$ fällt, $\frac{1}{x_3-k_3}$ oder $x_4 > 1$ u. s. w. Man hat daher

$$x - k_0 = \frac{1}{x_1} \qquad x = k_0 + \frac{1}{x_1}$$
$$x_1 - k_1 = \frac{1}{x_2} \qquad x_1 = k_1 + \frac{1}{x_2}$$
$$x_2 - k_2 = \frac{1}{x_3} \quad \text{, folglich} \quad x_2 = k_2 + \frac{1}{x_3}$$
$$x_3 - k_3 = \frac{1}{x_4} \qquad x_3 = k_3 + \frac{1}{x_4}$$

u. s. w.;

folglich $x = k_0 + \frac{1}{x_1} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{x_2}} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{x_3}}}$

$$= k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \text{ic.}}}}$$

Der Kettenbruch ist begrenzt oder unbegrenzt, je nachdem x mit der Einheit commensurabel oder incommensurabel ist.

Nennen wir hier, um Gleichförmigkeit in unsere Resultate zu bringen, von zwei Zahlen, ihre Zeichen mögen wie immer beschaffen seyn, jene die größere, von welcher die andere abgezogen werden muß, um eine positive Differenz zu erhalten, wobei also die Vergrößerung negativer Zahlen wie eine Verringerung derselben betrachtet wird, so ist

$$x_n - k_n$$

positiv, wenn k_n die nächst kleinere Zahl in Bezug auf x_n, d. h. die kleinere der beiden ganzen Zahlen ist, zwischen welche x_n fällt; und negativ, wenn für k_n die nächst größere dieser Zahlen genommen wird. Da nun $x_n - k_n = \frac{1}{x_{n+1}}$ und x_{n+1} dem numerischen Werthe nach größer als die Einheit ist, so muß k_{n+1}, diese Zahl mag die nächst kleinere oder die nächst größere in Bezug auf x_n seyn, dasselbe Zeichen haben, wie $x_n - k_n$. Hat also einer der Nenner $k_1, k_2, k_3, k_4 \ldots.$ des obigen Kettenbruches das Zeichen $-$, so ist bei der Bestimmung des unmittelbar vorhergehenden Nenners die der betreffenden Ergänzung des Kettenbruches zunächst liegende größere Zahl gewählt worden.

Liegt x_n zwischen k_n und $k_n \pm 1$, und kömmt k_n unter diesen zwei ganzen Zahlen der Größe x_n am nächsten, so muß $x_n - k_n$, dem numerischen Werthe nach, $< \frac{1}{2}$, folglich $x_{n+1} > 2$ ausfallen, und somit kann k_{n+1} nicht $= 1$ werden. Erscheint also die Einheit unter den

Nennern eines Kettenbruches, so ist bei der Bestimmung des vorhergehenden Nenners die Ergänzung des Kettenbruches nicht auf das genaueste durch eine ganze Zahl dargestellt worden.

Wir können uns hier der Betrachtung der Kettenbrüche mit negativen Nennern enthalten. Denn dieselben erzeugen negative Glieder im Kettenbruche, und diese lassen sich mit Hülfe der Gleichung

$$k_n - \cfrac{1}{k_{n+1} + \text{etc.}} = k_n - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{k_{n+1} + \text{etc.}}}$$

leicht wegschaffen. Wäre k_n der Einheit gleich, so würde der Kettenbruch einfacher. Es läßt sich aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß durch das oben erklärte Verfahren zur Verwandlung einer Größe in einen Kettenbruch nie ein der positiven Einheit gleicher Nenner erhalten wird, dem das Zeichen — nachfolgte.

Es seyen also im Kettenbruche

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \text{etc.}}}}$$

alle, auf k_0 folgenden Glieder positiv.

Berechnet man die Zahlen A_0, A_1, $A_2 \ldots B_0$, B_1, $B_2 \ldots$ mit Hülfe der Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
A_0 = k_0 & B_0 = 1 \\
A_1 = A_0 k_1 + 1 & B_1 = B_0 k_1 + 0 \\
A_2 = A_1 k_2 + A_0 & B_2 = B_1 k_2 + B_0 \\
A_3 = A_2 k_3 + A_1 & B_3 = B_2 k_3 + B_1 \\
A_4 = A_3 k_4 + A_2 & B_4 = B_3 k_4 + B_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n = A_{n-1} k_n + A_{n-2} & B_n = B_{n-1} k_n + B_{n-2} \\
\text{etc.,} & \text{etc.,}
\end{array}$$

so sind $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \frac{A_4}{B_4} \ldots \frac{A_n}{B_n} \ldots$

die reducirten Werthe des Kettenbruches; auch ist

$$\frac{A_n}{B_n} = k_0 + \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1}{B_2 B_3} - \frac{1}{B_3 B_4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1} B_n},$$

welche Gleichung, wegen des unendlichen Wachsens von B_n bei der unendlichen Zunahme von n, über die Convergenz des Kettenbruches keinen Zweifel übrig läßt. Ferner ist, wenn x den Totalwerth des Ket-

tenbruches, und $\frac{1}{x_{n+1}}$ die auf den Nenner k_n folgende Ergänzung anzeigt, der in vorhergehender Vorlesung gegebenen Formel zu Folge:

$$\frac{x - \frac{A_n}{B_n}}{x - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}} = -\frac{B_{n-1}}{B_n x_{n+1}},$$

also wegen $x_{n+1} > 1$ und $B_{n-1} < B_n$

$$x - \frac{A_n}{B_n} < x - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}},$$

und beide Differenzen haben entgegengesetzte Zeichen. Es liegt also der Totalwerth des Kettenbruches zwischen je zweien auf einander folgenden der reducirten Werthe $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$, $\frac{A_3}{B_3}$ . . . . . ., und jeder folgende stellt diesen Totalwerth genauer dar, als der vorhergehende.

Auch zeigt die Gleichung

$$x - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n}{B_n(B_n x_{n+1} + B_{n-1})},$$

daß $x - \frac{A_n}{B_n}$ bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich klein wird, und stets kleiner ist als $\frac{1}{(B_n)^2}$. Es führen daher die reducirten Werthe eines Kettenbruches der hier betrachteten Form mit Recht den Namen: Näherungsbrüche. Der Fehler, welchen man begeht, wenn man einen dieser Näherungsbrüche statt des Kettenbruches setzt, ist kleiner als der Quotient, welchen die Einheit durch das Quadrat seines Nenners getheilt geben würde.

Da $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = \pm 1$ ist, und A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1} nothwendig ganze Zahlen sind, so können die Bestandtheile A_n und B_n eines Näherungsbruches $\frac{A_n}{B_n}$ keinen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Factor enthalten, und daher erscheint jeder Näherungsbruch in der einfachsten Form, deren er fähig ist.

Besonders bemerkenswerth ist der Umstand, daß jeder aus einem Kettenbruche der hier betrachteten Form hervorgehende Näherungsbruch $\frac{A_n}{B_n}$ den Totalwerth x des Kettenbruches genauer angibt, als jeder

andere aus kleineren Zahlen gebildete Bruch $\frac{p}{q}$. Denn ist $q < B_n$, und wäre dabei ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$x - \frac{p}{q} < x - \frac{A_n}{B_n},$$

so müßte, da x zwischen $\frac{A_n}{B_n}$ und $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ liegt, also der numerische Werth von $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}$ die Summe der numerischen Werthe von $x - \frac{A_n}{B_n}$ und $x - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ ist, nothwendig

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{p}{q} < \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}$$

seyn, woraus, wegen $A_{n+1} B_n - A_n B_{n+1} = \pm 1$,

$$\frac{A_{n+1} q - B_{n+1} p}{B_{n+1} q} < \frac{1}{B_n B_{n+1}}$$

oder $A_{n+1} q - B_{n+1} p < \frac{q}{B_n}$ folgt.

Allein $\frac{q}{B_n}$ ist der Voraussetzung gemäß ein ächter Bruch, und $A_{n+1} q - B_{n+1} p$ wegen $q < B_{n+1}$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl, daher kann der numerische Werth von $A_{n+1} q - B_{n+1} p$ nicht kleiner ausfallen, als $\frac{q}{B_n}$, folglich auch die Annahme

$$x - \frac{p}{q} < x - \frac{A_n}{B_n}$$

nicht bestehen.

Außer den hier betrachteten Näherungsbrüchen lassen sich noch andere angeben, welche man erhält, wenn man zwischen dieselben neue Brüche auf folgende Art einschaltet:

Es sey k_n einer der die Einheit übersteigenden Nenner des Kettenbruches

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \text{ꝛc.}}}}$$

Ferner sey

$$\mathfrak{A}_1 = 1 \,.\, A_{n-1} + A_{n-2} \qquad \mathfrak{B}_1 = 1 \,.\, B_{n-1} + B_{n-2}$$
$$\mathfrak{A}_2 = 2 \,.\, A_{n-1} + A_{n-2} \qquad \mathfrak{B}_2 = 2 \,.\, B_{n-1} + B_{n-2}$$
$$\mathfrak{A}_3 = 3 \,.\, A_{n-1} + A_{n-2} \qquad \mathfrak{B}_3 = 3 \,.\, B_{n-1} + B_{n-2}$$
$$\mathfrak{A}_4 = 4 \,.\, A_{n-1} + A_{n-2} \qquad \mathfrak{B}_4 = 4 \,.\, B_{n-1} + B_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{A}_{k_n-1} = (k_n - 1)\, A_{n-1} + A_{n-2} \qquad \mathfrak{B}_{k_n-1} = (k_n - 1)\, B_{n-1} + B_{n-2}$$
$$\mathfrak{A}_{k_n} = A_n = k_n\, A_{n-1} + A_{n-2}, \qquad \mathfrak{B}_{k_n} = B_n = k_n\, B_{n-1} + B_{n-2},$$

so hat man eine Reihe von Brüchen

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1},\ \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}_2},\ \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{B}_3},\ \frac{\mathfrak{A}_4}{\mathfrak{B}_4}\ \ldots\ ,\ \frac{\mathfrak{A}_{k_n-1}}{\mathfrak{B}_{k_n-1}},$$

von welchen sich beweisen läßt, daß sie sämmtlich zwischen

$$\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}} = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{B}_0} \text{ und } \frac{A_n}{B_n} = \frac{\mathfrak{A}_{k_n}}{\mathfrak{B}_{k_n}}$$

liegen, im Zähler- und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und daß jeder derselben, wie $\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{B}_r}$, dem Totalwerthe x des Kettenbruches näher kommt, als jeder andere durch kleinere Zahlen ausgedrückte Bruch $\frac{p}{q}$, für welchen $x - \frac{p}{q}$ dasselbe Zeichen erhält, wie $x - \frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{B}_r}$. Die Beweise dieser Sätze sind den oben geführten ähnlich, und gründen sich darauf, daß den aufgestellten Formeln gemäß

$$\frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{B}_r} - \frac{\mathfrak{A}_{r-1}}{\mathfrak{B}_{r-1}} = \frac{rA_{n-1} + A_{n-2}}{rB_{n-1} + B_{n-2}} - \frac{(r-1)\,A_{n-1} + A_{n-2}}{(r-1)\,B_{n-1} + B_{n-2}}$$
$$= \frac{(-1)^n}{\mathfrak{B}_{r-1}\mathfrak{B}_r} \text{ ist.}$$

Um die hier vorgetragenen Sätze über die Kettenbrüche durch Beispiele zu erläutern, löse man einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch auf, welches nach der am Eingange dieser Vorlesung erklärten Methode bewerkstelliget wird, wenn man den Zähler dieses Bruches durch den Nenner theilt, ferner den Nenner durch den bei der ersten Division erhaltenen Rest, und so fort jeden vorhergehenden Rest durch den folgenden. Die Operation hört nothwendig einmal auf, und die bei derselben erscheinenden Quotienten sind die Werthe von

$$k_0,\ k_1,\ k_2,\ k_3\ \ldots\ldots$$

Vierzehnte Vorlesung.

Über die Sinusse und Cosinusse der Kreisbogen.

Denken wir uns auf der Peripherie eines mit der Längen-Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreises von einem bestimmten Puncte aus, welchen wir den Anfangspunct nennen wollen, beliebige Bogen abgeschnitten, die wir durch die Zahlen bezeichnen, welche die Verhältnisse ihrer Längen zu jener des Halbmessers angeben; so verhalten sich die nach entgegengesetzten Richtungen genommenen Bogen in der Rechnung wie entgegengesetzte Größen, für welche nämlich Addition und Subtraction wechselweise in einander übergehen, und werden in dieser Beziehung durch die Zeichen $+$ und $-$ unterschieden, wobei es übrigens gleichgültig ist, welchen von beiden Richtungen man das Zeichen $+$ beilegt. Der erwähnte Wechsel der Addition mit der Subtraction bei Bogen, welche in Hinsicht auf den Anfangspunct entgegengesetzte Lagen haben, zeigt sich sogleich in den einfachsten Verbindungen derselben, wenn man alle dabei denkbaren Fälle durch die nämliche Formel darzustellen beabsichtiget. Schneiden wir z. B., vom Anfangspuncte ausgehend, einen constanten Bogen $=a$ und einen variablen $=x$ ab, und nennen wir das zwischen ihren Endpuncten enthaltene Stück der Kreisperipherie y, so ist offenbar $y=a-x$, wenn x mit a nach derselben Gegend hinfällt, und $y=a+x$, wenn a und x entgegengesetzt liegen. Das Entgegengesetzte in diesen Beziehungen wird also durch die Änderung des Zeichens von x ausgedrückt. In der Formel $y=a-x$ kann ferner $x<a$, $x=a$, $x>a$ seyn. Im letzteren Falle erhält y das entgegengesetzte Zeichen. In der That ist y ein Bogen, welcher von dem Endpuncte des Bogens a ausgeht, und in den Fällen $x<a$ und $x>a$, hinsichtlich seines Ursprunges, entgegengesetzte Lagen annimmt.

Es ist aus der Elementar-Geometrie bekannt, daß die Peripherien jeder zweier Kreise sich verhalten wie ihre Durchmesser. Hieraus folgt, daß in jedem Kreise der Quotient, welchen die Peripherie durch den Durchmesser getheilt darbietet, eine unveränderliche Zahl ist. Diese Zahl, von welcher man durch die Betrachtung des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes und des demselben umschriebenen

Quadrates leicht zeigen kann, daß sie zwischen 3 und 4 fällt, wird von den Mathematikern fast durchgehends mit π bezeichnet. Sie gibt offenbar die halbe Peripherie eines Kreises an, dessen Halbmesser $= 1$ ist.

Der Durchmesser, welcher in unserem Kreise durch den Anfangspunct der Bogen geht, soll der erste, und der diesen senkrecht durchschneidende Durchmesser soll der zweite Hauptdurchmesser heißen. Durch beide Hauptdurchmesser wird die Peripherie in vier gleiche Theile getheilt, welche wir Quadranten nennen wollen. Wir werden dieselben vom Anfangspuncte der Bogen angefangen zählen, und da man im Kreise ohne Ende fort herumgehen kann, so ist der 5te Quadrant einerlei mit dem 1sten, der 6te einerlei mit dem 2ten u. s. w., und allgemein, wenn m, n positive ganze Zahlen sind, der $(4m+n)$te Quadrant einerlei mit dem nten.

Das Perpendikel, welches aus dem Endpuncte eines Bogens α auf den ersten Hauptdurchmesser fällt, heißt der Sinus dieses Bogens, und wird durch die der Zahl des Bogens vorgesetzte Sylbe *sin.* bezeichnet, also in unserem Falle durch $\sin. \alpha$, das Perpendikel hingegen, welches von dem Endpuncte des Bogens α zum zweiten Hauptdurchmesser geht, heißt der Cosinus dieses Bogens, und sein Zeichen ist $\cos. \alpha$. Man sieht, daß der Cosinus jedes Bogens dem Stücke des ersten Hauptdurchmessers gleich kommt, welches zwischen dem Mittelpuncte des Kreises und dem Sinus liegt; daß folglich der Sinus, der zugehörige Cosinus und der Halbmesser stets ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wovon letzterer die Hypothenuse ist. Es besteht daher die Gleichung

$$\sin. \alpha^2 + \cos. \alpha^2 = 1 \text{ *)}.$$

Die Sinusse und Cosinusse werden in der Analysis als einfache Functionen ihrer Bogen betrachtet, so daß ein Resultat für völlig bestimmt gilt, wenn es auf die genannten Functionen zurückgebracht ist. Man bedient sich zu diesem Behufe eigener Tafeln, in welche die nu-

---

*) Wir betrachten hier die Sylben *sin.* und *cos.* als bloße Functionszeichen, und behandeln die Zeichen $\sin. \alpha$ und $\cos. \alpha$ als Symbole für sich bestehender Größen; daher beziehen wir die Exponenten in Ausdrücken von der Form $\sin. \alpha^r$, $\cos. \alpha^r$ auf das ganze Zeichen, nicht bloß auf α allein. Der Sinus oder Cosinus des Bogens α^r muß durch $\sin. (\alpha^r)$ oder $\cos. (\alpha^r)$ angezeigt werden. Die Bezeichnung $\sin.^2 \alpha$, $\sin.^3 \alpha$ rc. würde nach dem, was wir in der ersten Vorlesung über diesen Gegenstand gesagt haben, mit $\sin. \sin. \alpha$, $\sin. \sin. \sin. \alpha$ rc. gleichbedeutend seyn.

merischen Werthe der Sinusse und Cosinusse neben jenen ihrer Bogen eingetragen sind. Ehe wir zeigen, wie ein Sinus oder Cosinus aus seinem Bogen berechnet wird, wollen wir die Beschaffenheit dieser Functionen näher betrachten.

Bogen, deren Endpuncte gleich weit von dem ersten Hauptdurchmesser entfernt sind, haben in numerischer Beziehung gleiche Sinusse; liegen jedoch diese Endpuncte auf entgegengesetzten Seiten des genannten Durchmessers, so nehmen die Sinusse entgegengesetzte Zeichen an, da sie sich im Calcul wie entgegengesetzte Größen verhalten. Ein Gleiches gilt von den Cosinussen in Hinsicht auf den zweiten Hauptdurchmesser.

Da man auf der Peripherie eines Kreises ohne Ende fortschreiten, also auch Bogen von jeder beliebigen Länge abschneiden kann, so überzeugt man sich, wenn man alles so eben Gesagte gehörig berücksichtiget, durch die einfachsten geometrischen Betrachtungen von der Richtigkeit folgender Sätze:

Wenn man einen Bogen von seinen kleinsten Werthen angefangen nach der positiven Richtung ins Unendliche wachsen läßt, so wächst sein Sinus und sein Cosinus nimmt ab, so lange der Endpunct des Bogens den ersten Quadranten nicht überschreitet; ist die Länge des Bogens dem vierten Theile der Peripherie gleich, so erhält der Sinus den größten Werth, nämlich 1, und der Cosinus den kleinsten, nämlich 0, d. h. es ist $sin. \frac{\pi}{2} = 1$ und $cos. \frac{\pi}{2} = 0$. Geht der Endpunct des Bogens in den zweiten Quadranten über, so nimmt der Sinus wieder ab und der Cosinus wächst, indem er zugleich negativ wird. Für den Bogen, dessen Länge der halben Peripherie gleich ist, ergibt sich $sin. \pi = 0$, $cos. \pi = -1$. Fällt der Endpunct des Bogens in den dritten Quadranten, so wächst der Sinus, indem er zugleich das Zeichen — erhält, und der Cosinus nimmt ab und bleibt ebenfalls negativ. Ist die Bogenlänge drei Quadranten gleich, so hat man $sin. \frac{3\pi}{2} = -1$, $cos. \frac{3\pi}{2} = 0$. Rückt endlich der Endpunct des Bogens in den vierten Quadranten, so bleibt der Sinus negativ und nimmt ab, der Cosinus hingegen wird positiv und nimmt zu. Kehrt der Endpunct des Bogens in den Anfangspunct zurück, so haben sein Sinus und Cosinus dieselben Werthe, als wenn der Bogen $= 0$ wäre, d. h. es ist $sin. 2\pi = sin. 0 = 0$, $cos. 2\pi = cos. 0 = +1$. Im

5ten, 6ten, 7ten, 8ten Quadranten kehren dieselben Werthe zurück, welche sich zeigten, als der Endpunct des Bogens in den 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten fiel, u. s. w.

Läßt man aber einen Bogen in negativer Richtung wachsen, so treten, wenn der Endpunct desselben in die Quadranten fällt, welche der Reihe nach die Stellenzahlen —1, —2, —3, —4 .... erhalten, hinsichtlich des Verhaltens seines Sinus und Cosinus dieselben Umstände ein, welche bei dem Wachsen eines Bogens nach der positiven Richtung Statt finden, dessen Endpunct in dem 4ten, 3ten, 2ten, 1sten .... Quadranten angetroffen wird.

Überhaupt ist also, wenn r eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet, die Nulle mit eingeschlossen:

(1)	$\sin. r\pi = 0,$	(4)	$\cos. \frac{(2r+1)\pi}{2} = 0,$
(2)	$\sin. \frac{(4r+1)\pi}{2} = +1,$	(5)	$\cos. 2r\pi = +1,$
(3)	$\sin. \frac{(4r-1)\pi}{2} = -1,$	(6)	$\cos. (2r+1)\pi = -1.$

Auch findet man für jeden Werth von α

(7) $\sin. (-\alpha) = -\sin. \alpha,$ (8) $\cos. (-\alpha) = \cos. \alpha.$

Mit Hülfe einer einfachen geometrischen Construction werden für alle Werthe von α und β folgende Formeln bewiesen:

(9) $\sin. (\alpha+\beta) = \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta,$

(10) $\cos. (\alpha+\beta) = \cos.\alpha \cos.\beta - \sin.\alpha \sin.\beta.$

Man setze in denselben $\alpha = 2r\pi$, so findet man

(11) $\sin. (2r\pi + \beta) = \sin.\beta,$

(12) $\cos. (2r\pi + \beta) = \cos.\beta.$

Setzt man aber $\alpha = (2r+1)\pi$, so folgt:

(13) $\sin. [(2r+1)\pi+\beta] = -\sin.\beta,$

(14) $\cos. [(2r+1)\pi+\beta] = -\cos.\beta.$

Auf dieselbe Art erhält man, wenn man in (9) und (10) zuerst $\alpha = \frac{(4r+1)\pi}{2}$, und dann $\alpha = \frac{(4r-1)\pi}{2}$ setzt:

(15) $\sin. \left[\frac{4r+1}{2}\pi + \beta\right] = \cos.\beta,$

(16) $\cos. \left[\frac{4r+1}{2}\pi + \beta\right] = -\sin.\beta,$

$$(17) \qquad \sin.\left[\frac{4r-1}{2}\pi + \beta\right] = -\cos.\beta,$$

$$(18) \qquad \cos.\left[\frac{4r-1}{2}\pi + \beta\right] = \sin.\beta.$$

Alle diese Formeln gelten, r mag was immer für eine ganze positive oder negative Zahl, und β was immer für einen positiven oder negativen Bogen bedeuten. Wir halten es für überflüssig, die Formeln 9—18 mit Veränderung des Zeichens von β besonders aufzuführen, da dabei bloß die Formeln (7) und (8) in Anwendung kommen.

Es ist eine nützliche Übung, sämmtliche Formeln 11—18 für beide Zeichen von β aus geometrischen Betrachtungen abzuleiten.

Die angeführten Formeln zeigen, daß die Kenntniß der Sinusse und Cosinusse aller im ersten Quadranten liegender Bogen hinreicht, um diese Functionen für jeden anderen Bogen bestimmen zu können. Aus diesem Grunde beziehen sich die Sinustafeln auch bloß auf den ersten Quadranten.

Aus (15) folgt ferner für $r=0$ und $\beta=-\alpha$

$$\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos.\alpha;$$

oder, wenn man hier $\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ statt α schreibt:

$$\sin.\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha\right) = \cos.\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right).$$

Es sind daher die Sinusse aller Bogen von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ zugleich die Cosinusse der Bogen von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{4}$, so daß es überflüssig ist, in den Tafeln die Sinusse und Cosinusse aller Theile des Quadranten zugleich anzugeben.

Wir haben bis jetzt den Bogen als eine den Sinus und Cosinus bestimmende Größe betrachtet; es kann aber auch umgekehrt nach dem Bogen gefragt werden, welchem ein gegebener Sinus oder Cosinus zugehört. Man bezeichnet einen Bogen, dessen Sinus $=x$ ist, durch *Arc. sin.* x, und einen Bogen, dessen Cosinus $=x$ ist, durch *Arc. cos.* x*).

*) Herschel schreibt den in der ersten Vorlesung angeführten Principien gemäß $\sin.^{-1}x$, $\cos.^{-1}x$ statt *Arc. sin.* x, *Arc. cos.* x; jedoch ist die letztere Bezeichnung zu allgemein im Gebrauche, als daß wir es für räthlich hielten, davon abzugehen.

Setzt man $x = sin.\beta$, so hat x für jeden Werth von β nur einen seiner Natur nach völlig bestimmten Werth, d. h. der Sinus ist eine einförmige Function seines Bogens. Allein $Arc.sin.x$ hat außer dem Werthe β noch unzählig viele andere, d. h. der Bogen ist eine vielförmige Function seines Sinus. Wie aus den Formeln (11) und (13) zu ersehen ist, kann man für jeden ganzen positiven oder negativen Werth von r

(19) $$Arc.sin.x = 2r\pi + \beta,$$ und auch

(20) $$Arc.sin.x = (2r+1)\pi - \beta$$ setzen.

Ein Gleiches gilt auch von $Arc.cos.x$; es ist nämlich nach (12) und (8)

(21) $$Arc.cos.x = 2r\pi + \beta,$$ und

(22) $$Arc.cos.x = 2r\pi - \beta.$$

Ferner ist

(23) $$Arc.sin.(-x) = 2r\pi - \beta,$$

(24) $$Arc.sin.(-x) = (2r+1)\pi + \beta,$$ und

(25) $$Arc.cos.(-x) = (2r+1)\pi + \beta,$$

(26) $$Arc.cos.(-x) = (2r+1)\pi - \beta.$$

Da wegen $sin.\beta^2 + cos.\beta^2 = 1$, $\sqrt{1-x^2}$ den Cosinus eines Bogens vorstellt, dessen Sinus $= x$ ist, und den Sinus eines Bogens, dessen Cosinus $= x$ ist, so hat man auch

(27) $$Arc.sin.x = Arc.cos.\sqrt{1-x^2},$$

(28) $$Arc.cos.x = Arc.sin.\sqrt{1-x^2}.$$

Fünfzehnte Vorlesung.

Über die Sinusse und Cosinusse der Kreisbogen.

(Fortsetzung.)

Aus den in der vorhergehenden Vorlesung angeführten Formeln

$$(9) \quad \sin.(\alpha+\beta) = \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta,$$

$$(10) \quad \cos.(\alpha+\beta) = \cos.\alpha \cos.\beta - \sin.\alpha \sin.\beta$$

ergeben sich mehrere für die Rechnung wichtige Folgerungen. Setzt man in denselben $-\beta$ statt β, so findet man

$$\sin.(\alpha-\beta) = \sin.\alpha \cos.\beta - \cos.\alpha \sin.\beta$$

$$\cos.(\alpha-\beta) = \cos.\alpha \cos.\beta + \sin.\alpha \sin.\beta.$$

Verbindet man jede dieser Gleichungen mit derjenigen, aus welcher sie hervorging, durch Addition und Subtraction, so hat man

$$(29) \quad \sin.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha-\beta) = 2\sin.\alpha \cos.\beta,$$

$$(30) \quad \sin.(\alpha+\beta) - \sin.(\alpha-\beta) = 2\cos.\alpha \sin.\beta,$$

$$(31) \quad \cos.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha-\beta) = 2\cos.\alpha \cos.\beta,$$

$$(32) \quad \cos.(\alpha+\beta) - \cos.(\alpha-\beta) = -2\sin.\alpha \sin.\beta.$$

Die Formel (30) folgt unmittelbar aus (29), wenn man α mit β vertauscht; und (32) aus (31), wenn man $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ statt α, und $\frac{\pi}{2}+\beta$ statt β setzt.

Der Sinus des dritten Theiles des Quadranten ist der Hälfte des Halbmessers gleich; in Zeichen: es ist $\sin.\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; setzt man daher in (29) und in (32) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, so ergibt sich

$$(33) \quad \sin.\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right) = \cos.\beta - \sin.\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right),$$

$$(34) \quad \cos.\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right) = \cos.\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right) - \sin.\beta.$$

Sind daher die Sinusse und Cosinusse der Bogen, welche zwischen o und $\frac{\pi}{6}$ liegen, bekannt, so lassen sich die Sinusse und Cosinusse der Bogen, welche zwischen $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{3}$ liegen, mit Hülfe dieser Formeln leicht berechnen.

Kennt man den Sinus und Cosinus eines Bogens, so findet man die Sinusse und Cosinusse aller Vielfachen desselben auf folgende Art.

Man setze in (9) und in (10) $\alpha = m\beta$, so hat man

(35) $\sin.(m+1)\beta = \sin.m\beta\cos.\beta + \cos.m\beta\sin.\beta,$

(36) $\cos.(m+1)\beta = \cos.m\beta\cos.\beta - \sin.m\beta\sin.\beta.$

Es ist also, wenn man hier $m = 1, 2, 3 \ldots$ seyn läßt:

(37)
$$\begin{aligned}
\sin.2\beta &= 2\sin.\beta\cos.\beta\\
\cos.2\beta &= \cos.\beta^2 - \sin.\beta^2\\
\sin.3\beta &= 3\sin.\beta\cos.\beta^2 - \sin.\beta^3\\
\cos.3\beta &= \cos.\beta^3 - 3\sin.\beta^2\cos.\beta\\
\sin.4\beta &= 4\sin.\beta\cos.\beta^3 - 4\sin.\beta^3\cos.\beta\\
\cos.4\beta &= \cos.\beta^4 - 6\sin.\beta^2\cos.\beta^2 + \sin.\beta^4
\end{aligned}$$
u. s. w.,

welche Ausdrücke man nach Belieben weiter fortsetzen kann.

Will man die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von β, so viel als möglich, bloß durch $\sin.\beta$ allein, oder bloß durch $\cos.\beta$ allein darstellen, so kann man dieß leicht bewerkstelligen, wenn man in (29) und (31) $m\beta$ statt α, und 2β statt β, oder auch nur $m\beta$ statt α schreibt. Die erste Substitution gibt:

$$\sin.(m+2)\beta = 2\sin.m\beta\cos.2\beta - \sin.(m-2)\beta,$$
$$\cos.(m+2)\beta = 2\cos.m\beta\cos.2\beta - \cos.(m-2)\beta.$$

Allein es ist $\cos.2\beta = \cos.\beta^2 - \sin.\beta^2$ und
$\cos.\beta^2 = 1 - \sin.\beta^2$, also

(38) $\cos.2\beta = 1 - 2\sin.\beta^2$; und daher

(39) $\sin.(m+2)\beta = 2(1-2\sin.\beta^2)\sin.m\beta - \sin.(m-2)\beta,$
$\cos.(m+2)\beta = 2(1-2\sin.\beta^2)\cos.m\beta - \cos.(m-2)\beta.$

Setzt man hier $m = 2, 4, 6 \ldots$, so findet man wegen $\sin.2\beta = 2\sin.\beta\cos.\beta$:

(40)
$$\begin{aligned}
\sin.4\beta &= (4\sin.\beta - 8\sin.\beta^3)\cos.\beta\\
\sin.6\beta &= (6\sin.\beta - 32\sin.\beta^3 + 32\sin.\beta^5)\cos.\beta\\
\sin.8\beta &= (8\sin.\beta - 80\sin.\beta^3 + 192\sin.\beta^5 - 128\sin.\beta^7)\cos.\beta\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\cos.4\beta &= 1 - 8\sin.\beta^2 + 8\sin.\beta^4\\
\cos.6\beta &= 1 - 18\sin.\beta^2 + 48\sin.\beta^4 - 32\sin\beta^6\\
\cos.8\beta &= 1 - 32\sin\beta^2 + 160\sin.\beta^4 - 256\sin.\beta^6 + 128\sin.\beta^8\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Setzt man aber $m = 1, 3, 5 \ldots$, so findet man

(41) $\sin.3\beta = 3\sin.\beta - 4\sin.\beta^3$

$\sin.5\beta = 5\sin.\beta - 20\sin.\beta^3 + 16\sin.\beta^5$

$\sin.7\beta = 7\sin.\beta - 56\sin.\beta^3 + 112\sin.\beta^5 - 64\sin.\beta^7$

. . . .

$\cos.3\beta = (1 - 4\sin.\beta^2)\cos.\beta$

$\cos.5\beta = (1 - 12\sin.\beta^2 + 16\sin.\beta^4)\cos.\beta$

$\cos.7\beta = (1 - 24\sin.\beta^2 + 80\sin.\beta^4 - 64\sin.\beta^6)\cos.\beta$

. . . .

Die zweite Substitution gibt:

(42) $\sin.(m+1)\beta = 2\sin.m\beta\cos.\beta - \sin.(m-1)\beta,$

(43) $\cos(m+1)\beta = 2\cos.m\beta\cos.\beta - \cos.(m-1)\beta.$

Daher hat man für $m = 1, 2, 3, 4 \ldots.$

(44) $\sin.2\beta = 2\sin.\beta\cos.\beta$

$\sin.3\beta = \sin.\beta(4\cos.\beta^2 - 1)$

$\sin.4\beta = \sin.\beta(8\cos.\beta^3 - 4\cos.\beta)$

$\sin.5\beta = \sin.\beta(16\cos.\beta^4 - 12\cos.\beta^2 + 1)$

. . . .

$\cos.2\beta = 2\cos.\beta^2 - 1$

$\cos.3\beta = 4\cos.\beta^3 - 3\cos.\beta$

$\cos.4\beta = 8\cos.\beta^4 - 8\cos.\beta^2 + 1$

$\cos.5\beta = 16\cos.\beta^5 - 20\cos.\beta^3 + 5\cos.\beta$

. . . .

Die Bildungsgesetze der Coefficienten in den Formeln 37, 40, 41, 44 werden wir in der Folge kennen lernen. Wie diese Formeln bei der Berechnung der Sinustafeln behülflich sind, ist für sich klar.

Die Formeln 29—32 lassen sich noch unter einer anderen Gestalt darstellen. Man setze

$$\alpha + \beta = \eta, \quad \alpha - \beta = \theta,$$

so wird $\alpha = \frac{\eta+\theta}{2}, \quad \beta = \frac{\eta-\theta}{2};$

folglich hat man:

(45) $\sin.\eta + \sin.\theta = 2\sin.\left(\frac{\eta+\theta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\eta-\theta}{2}\right),$

(46) $\sin.\eta - \sin.\theta = 2\cos.\left(\frac{\eta+\theta}{2}\right)\sin.\left(\frac{\eta-\theta}{2}\right),$

(47) $\cos.\eta + \cos.\theta = 2\cos.\left(\frac{\eta+\theta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\eta-\theta}{2}\right),$

(48) $\cos.\eta - \cos.\theta = -2\sin.\left(\frac{\eta+\theta}{2}\right)\sin.\left(\frac{\eta-\theta}{2}\right).$

Wir haben oben

$$\cos.2\beta = 1 - 2\sin.\beta^2 = 2\cos.\beta^2 - 1$$

gefunden. Hieraus folgt

$$\sin.\beta^2 = \frac{1-\cos.2\beta}{2}, \quad \cos.\beta^2 = \frac{1+\cos.2\beta}{2};$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}\beta$ statt β schreibt:

(49) $$\sin.\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1-\cos.\beta}{2}},$$

(50) $$\cos.\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1+\cos.\beta}{2}}.$$

Setzt man in diesen Formeln $\frac{\pi}{2} - \beta$ statt β, so hat man

(51) $$\sin.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sin.\beta}{2}},$$

(52) $$\cos.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin.\beta}{2}};$$

wobei wir noch erinnern, daß

$$\sin.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \cos.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right), \text{ und}$$

$$\cos.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

ist, also (52) aus (51) durch bloße Änderung des Zeichens von β hervorgeht.

Nehmen wir in diesen letztern Formeln $\beta = 0$, so folgt

$$\sin.\frac{\pi}{4} = \cos.\frac{\pi}{4}; \text{ aber es ist}$$

$$\left(\sin.\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos.\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1, \text{ daher}$$

$$\sin.\frac{\pi}{4} = \cos.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Entwickelt man, auf diese Bemerkung gestützt, die Formeln (51) und (52) nach (9) und (10), so findet man:

(53) $$\cos.\frac{\beta}{2} - \sin.\frac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \sin.\beta},$$

$$\cos.\frac{\beta}{2} + \sin.\frac{\beta}{2} = \sqrt{1 + \sin.\beta};$$

und durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen:

$$(54)\qquad \cos.\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin.\beta} + \sqrt{1-\sin.\beta}}{2},$$

$$(55)\qquad \sin.\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin.\beta} - \sqrt{1-\sin.\beta}}{2} \text{ *)}.$$

Da alle Winkel durch Kreisbogen gemessen werden können, welche man mit der Längeneinheit als Halbmesser aus ihren Scheiteln zwischen ihren Schenkeln beschreibt, was eben so viel heißt, als jenen Winkel für die Einheit der Winkel annehmen, bei welchem der aus seinem Scheitel zwischen seinen Schenkeln beschriebene Kreisbogen dem Halbmesser gleich ist: so kann man die Sinusse und Cosinusse auch als Functionen der correspondirenden Winkel betrachten, und, wie es in der Trigonometrie geschieht, auf die Auflösung aller das Dreieck betreffender Probleme anwenden. Wir werden hier gelegenheitlich zeigen, wie die Hauptsätze der Trigonometrie, mit Zuziehung des Satzes, daß die Seiten eines Dreieckes sich verhalten wie die Sinusse der Gegenwinkel, aus den obigen Formeln abgeleitet werden können, wobei wir uns einer einfachen, von Cauchy vorgetragenen, Analyse bedienen. Es gibt nämlich die Formel (31), wenn man $\beta+\gamma$ statt β setzt, mit Rücksicht auf (8)

$$\cos.(\alpha+\beta+\gamma) + \cos.(\beta+\gamma-\alpha) = 2\cos.\alpha\cos.(\beta+\gamma);$$

und wenn man $\beta-\gamma$ statt β setzt:

$$\cos.(\alpha+\beta-\gamma) + \cos.(\alpha+\gamma-\beta) = 2\cos.\alpha\cos.(\beta-\gamma).$$

Addirt man diese zwei Gleichungen, so hat man

$$(56)\ \cos.(\alpha+\beta+\gamma)+\cos.(\beta+\gamma-\alpha)+\cos.(\alpha+\gamma-\beta)+\cos.(\alpha+\beta-\gamma)= = 4\cos.\alpha\,.\,\cos.\beta\,.\,\cos.\gamma.$$

*) Diese Formeln folgen auch unmittelbar aus (49) und (50), wenn man letzteren Formeln, wegen

$$\cos.\beta = \sqrt{1-\sin.\beta^2}$$

die Gestalt $\sin.\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin.\beta^2}}{2}\right)}$

$$\cos.\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{1-\sin.\beta^2}}{2}\right)}$$

gibt, und die Wurzelgrößen nach der Formel

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}$$

behandelt.

Setzt man hier $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ statt α, β, γ, und bezeichnet man die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ durch σ, so folgt

$$(57)\quad \cos.\frac{\sigma}{2} + \cos.\left(\frac{\sigma}{2} - \alpha\right) + \cos.\left(\frac{\sigma}{2} - \beta\right) + \cos.\left(\frac{\sigma}{2} - \gamma\right) = \\ = 4\cos.\frac{\alpha}{2}\cos.\frac{\beta}{2}\cos.\frac{\gamma}{2}.$$

Sind α, β, γ die Winkel eines Dreieckes, so ist

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

daher gibt diese Gleichung

$$(58)\quad \sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma = 4\cos.\frac{\alpha}{2}\cos.\frac{\beta}{2}\cos.\frac{\gamma}{2}.$$

Man setze hier nach der Reihe

$$\begin{matrix} -\alpha, & \pi - \beta, & \pi - \gamma & \\ \pi - \alpha, & -\beta, & \pi - \gamma & \text{statt}\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ \pi - \alpha, & \pi - \beta, & -\gamma & \end{matrix}$$

so erhält man die Gleichungen:

$$(59)\quad \sin.\beta + \sin.\gamma - \sin.\alpha = 4\cos.\frac{\alpha}{2}.\sin.\frac{\beta}{2}.\sin.\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin.\alpha + \sin.\gamma - \sin.\beta = 4\sin.\frac{\alpha}{2}.\cos.\frac{\beta}{2}.\sin.\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin.\alpha + \sin.\beta - \sin.\gamma = 4\sin.\frac{\alpha}{2}.\sin.\frac{\beta}{2}.\cos.\frac{\gamma}{2},$$

wovon die erste mit (58), und die beiden letzten unter einander durch Multiplication verbunden, mit Berücksichtigung der ersten Gleichung (37), auf die Formeln

$$(60)\quad \left(\cos.\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma)(\sin.\beta + \sin.\gamma - \sin.\alpha)}{4\sin.\beta\sin.\gamma},$$

$$(61)\quad \left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(\sin.\alpha + \sin.\gamma - \sin.\beta)(\sin.\alpha + \sin.\beta - \sin.\gamma)}{4\sin.\beta\sin.\gamma}$$

führen. Es seyen nun a, b, c die Seiten des Dreieckes, welche den Winkeln α, β, γ gegenüber stehen, so ist dem oben erwähnten Satze zu Folge:

$$\frac{a}{\sin.\alpha} = \frac{b}{\sin.\beta} = \frac{c}{\sin.\gamma}.$$

Bezeichnet man jeden dieser Quotienten durch ρ, so hat man

$$a = \rho\sin.\alpha,\quad b = \rho\sin.\beta,\quad c = \rho\sin.\gamma,$$

und die Formeln 60 und 61 verwandeln sich, nach verrichteter Multiplication des Zählers und Nenners mit ρ, in

(62) $$\left(\cos.\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}, \text{ und}$$

(63) $$\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc};$$

welche Formeln, so wie die daraus folgende

(64) $$\sin.\alpha = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2bc}$$

zur Berechnung jedes der Winkel eines Dreieckes dienen, wenn die Seiten desselben gegeben sind, und die Anwendung der Logarithmen gestatten. Durch Subtraction der Formel (63) von (62) erhält man auch

(65) $$\cos.\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Sechzehnte Vorlesung.

Über die Moivre'sche Binomialformel.

Multiplicirt man die Binome

$$\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha \quad \text{und} \quad \cos.\beta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\beta,$$

so findet man das Product

$$\cos.\alpha\,\cos.\beta - \sin.\alpha\,\sin.\beta + \sqrt{-1}\,(\sin.\alpha\,\cos.\beta + \cos.\alpha\,\sin.\beta),$$

$$\text{oder} \quad \cos.(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\,\sin.(\alpha+\beta).$$

Es ist also

$$(66) \quad (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)\,(\cos.\beta + \sqrt{-1}\,\sin.\beta) = \\ = \cos.(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\,\sin.(\alpha+\beta).$$

Hieraus folgt

$$(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)\,(\cos.\beta + \sqrt{-1}\,\sin.\beta)\,(\cos.\gamma + \sqrt{-1}\,\sin.\gamma) = \\ = [\cos.(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\,\sin.(\alpha+\beta)]\,(\cos.\gamma + \sqrt{-1}\,\sin.\gamma) \\ = \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + \sqrt{-1}\,.\,\sin.(\alpha+\beta+\gamma).$$

Auf dieselbe Art kann man fortschließen, und erhält für jede beliebige Anzahl von Factoren:

$$(67) \quad (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)\,(\cos.\beta + \sqrt{-1}\,\sin.\beta)\,(\cos.\gamma + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha) \\ (\cos.\delta + \sqrt{-1}\,\sin.\delta) \;\ldots\; \text{ꝛc.} = \\ = \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\,\text{ꝛc.}) + \sqrt{-1}\,\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\,\text{ꝛc.}).$$

Setzt man alle Factoren dieses Productes einander gleich, und bezeichnet man ihre Anzahl durch m, so ergibt sich die merkwürdige, von de Moivre zuerst gefundene Formel:

$$(68) \quad (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)^{m} = \cos.m\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.m\alpha.$$

Dieselbe ist hier bloß für ganze positive Werthe des Exponenten m bewiesen; allein sie gilt auch für jeden andern Werth dieses Exponenten.

Denn aus (68) folgt, in so fern m eine ganze positive Zahl vorstellt:

$$(\cos.m\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.m\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha;$$

und da diese Gleichung für jeden Werth des Bogens α besteht, also

auch richtig bleibt, wenn man $\frac{\alpha}{m}$ statt α schreibt, so hat man

$$(cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)^{\frac{1}{m}} = cos.\,\frac{\alpha}{m} + \sqrt{-1}\ sin.\,\frac{\alpha}{m}.$$

Erhebt man beide Theile dieser Gleichung zur Potenz, deren Exponent die ganze positive Zahl k ist, so findet man mit Rücksicht auf (68)

$$(cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)^{\frac{k}{m}} = cos.\,\frac{k}{m}\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\frac{k}{m}\,\alpha.$$

Es gilt also die Formel 68 auch, wenn man einen positiven rationalen Bruch statt des Exponenten m setzt.

Ferner ist

$$(cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)(cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha) = cos.\,\alpha^2 + sin.\,\alpha^2 = 1,$$

folglich

$$\begin{aligned}(cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)^{-1} &= cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha\\ &= cos.\,(-\alpha) + \sqrt{-1}\ sin.\,(-\alpha),\end{aligned}$$

und daher, m mag eine ganze oder gebrochene rationale positive Zahl seyn,

$$\begin{aligned}(cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)^{-m} &= [cos.\,(-\alpha) + \sqrt{-1}\ sin.\,(-\alpha)]^m\\ &= cos.(-m\alpha) + \sqrt{-1}\ sin.\,(-m\,\alpha).\end{aligned}$$

Es besteht also die Gleichung (68) auch für rationale negative Exponenten.

Da endlich jede mit der Einheit incommensurable Zahl näherungsweise mit jeder beliebigen Schärfe durch eine rationale Zahl dargestellt werden kann, so läßt sich die Richtigkeit der Gleichung (68) auch für incommensurable Werthe von m nach der Methode der Grenzen leicht rechtfertigen.

Es ist also für jeden Werth von m

$$(68)\quad (cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)^m = cos.\,m\alpha + \sqrt{-1}\,.\ sin.\,m\,\alpha.$$

Ändert man in dieser Gleichung das Zeichen von α, so hat man:

$$(cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\ sin.\,\alpha)^m = cos.\,m\,\alpha - \sqrt{-1}\ sin.\,m\,\alpha,$$

woraus folgt, daß die Formel (68) für beide Zeichen der imaginären Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ besteht; ein Resultat, welches sich auch ergibt, wenn man in der obigen Deduction dieser Formel überall $-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$ setzt.

Wie aus den in der vierzehnten Vorlesung erhaltenen Formeln (11) und (12) zu ersehen ist, haben alle Kreisbogen, welche unter einander

um ganze Vielfache der Peripherie 2π unterschieden sind, zugleich denselben Sinus und Cosinus, und sind, wie sich leicht zeigen läßt, die einzigen Bogen, welchen diese Eigenschaft zukommt. Bedeutet also r eine ganze positive oder negative Zahl, so ist

$$\sin.\beta = \sin.\alpha \quad \text{und} \quad \cos.\beta = \cos.\alpha$$

eine nothwendige Folge von

$$\beta = \alpha + 2r\pi,$$

und umgekehrt.

Setzen wir demnach in der Gleichung (68) $\alpha + 2r\pi$ statt α, so haben wir

$$(69)\quad (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)^m = \cos.m(\alpha + 2r\pi) + \sqrt{-1}\sin.m(\alpha + 2r\pi).$$

Da nun einerseits an der Richtigkeit dieser Gleichung, den Gründen zu Folge, auf welchen sie beruht, nicht zu zweifeln ist; andererseits aber, wenn m keine ganze positive oder negative Zahl vorstellt, im Allgemeinen $\cos.m(\alpha + 2r\pi)$ von $\cos.m\alpha$, und $\sin.m(\alpha + 2r\pi)$ von $\sin.m\alpha$ abweicht: so sind wir genöthigt, die Potenz

$$(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)^m,$$

sobald ihr Exponent keine ganze Zahl ist, als eine vieldeutige Größe anzuerkennen.

Ehe wir die Anzahl ihrer Werthe näher in das Auge fassen, wollen wir der Gleichung (69) eine andere Form geben. Setzen wir in derselben $\alpha = 0$, so haben wir $\cos.\alpha = 1$, $\sin.\alpha = 0$, also für jedes ganze r

$$(70)\quad 1^m = \cos.2rm\pi + \sqrt{-1}\sin.2rm\pi;$$

woraus hervorgeht, daß jeder Potenz der Einheit, deren Exponent keine ganze Zahl ist, mehrere Werthe entsprechen.

Nun ist nach (66)

$$\cos.m(\alpha + 2r\pi) + \sqrt{-1}\sin.m(\alpha + 2r\pi) =$$
$$= (\cos.m\alpha + \sqrt{-1}\sin.m\alpha)(\cos.2rm\pi + \sqrt{-1}\sin.2rm\pi),$$

daher besteht die Gleichung

$$(71)\quad (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)^m = 1^m.(\cos.m\alpha + \sqrt{-1}.\sin.m\alpha).$$

Da nun hier wieder statt α jeder Bogen gesetzt werden kann, dessen Cosinus und Sinus mit $\cos.\alpha$ und $\sin.\alpha$ übereinstimmen, so findet man alle Werthe der Potenz $(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)^m$, wenn man irgend einen dieser Werthe mit allen Werthen der Potenz 1^m multiplicirt.

Sind p, q zwei reelle Größen, so kann man dieselben als Producte einer reellen Größe R mit dem Sinus und Cosinus eines Bogens θ betrachten. Denn setzt man

$$p = R\, cos.\, \theta, \quad q = R\, sin.\, \theta,$$

so wird $R = \sqrt{p^2 + q^2}$, welche Größe nothwendig reell ist, und

$$\theta = Arc.\, sin.\, \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} = Arc.\, cos.\, \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

worin, weil die Brüche $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ und $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ die Einheit nie übersteigen, kein Widerspruch liegt.

Mit Hülfe dieser Transformation hat man

$$(72) \qquad p + q\sqrt{-1} = R(cos.\, \theta + \sqrt{-1}\, sin.\, \theta);$$

daher lassen sich die obigen Resultate auf die Potenzen jedes imaginären Binoms $p + q\sqrt{-1}$, und wenn man $q = 0$ setzt, auf die Potenzen jeder reellen Größe p anwenden.

Es handelt sich also nur um die Werthe der Potenz 1^m, welche sämmtlich aus der Form

$$cos.\, 2 r m \pi + \sqrt{-1}\, sin.\, 2 r m \pi$$

hervorgehen, wenn man statt r alle ganzen positiven und negativen Zahlen, mit Einschluß der Nulle, substituirt.

Lassen wir erstlich den Exponenten m eine gebrochene rationale Zahl $= \frac{h}{k}$ seyn, wobei h und k ganze Zahlen anzeigen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler zulassen, so ist

$$cos.\, \frac{2 r h \pi}{k} + \sqrt{-1}\, sin.\, \frac{2 r h \pi}{k}$$

die allgemeine Form aller Werthe der Potenz

$$1^{\frac{h}{k}} = \sqrt[k]{1^h}.$$

Bezeichnet q eine der beiden unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen, zwischen welche, in Bezug auf einen individuellen Werth der unbestimmten ganzen Zahl r, der Bruch $\frac{rh}{k}$ fällt, so kann man rh unter der Form $kq + \rho$ vorstellen, und dabei q so wählen, daß die ganze Zahl ρ, numerisch betrachtet, nicht größer wird, als $\frac{k}{2}$, d. h. zwischen die Grenzen $-\frac{k}{2}$ und $+\frac{k}{2}$ fällt. Sollte ρ der Zahl $\frac{k}{2}$ selbst

gleich werden, was nur für ein gerades k möglich ist, so kann man nach Belieben $\rho = +\frac{k}{2}$ oder $\rho = -\frac{k}{2}$ machen. Gibt man der Zahl r so viele in der Reihe der natürlichen Zahlen unmittelbar auf einander folgende Werthe, als k Einheiten enthält, so werden dabei keine zwei der Werthe von ρ einander gleich. Denn wäre dieß für $r = r_1$ und $r = r_2$ unter der Voraussetzung $r_2 - r_1 < k$ der Fall; d. h. wäre

$$r_1 h = k q_1 + \rho \text{ und zugleich } r_2 h = k q_2 + \rho,$$

so müßte $(r_2 - r_1) h = k (q_2 - q_1)$ seyn, folglich, da h und k Primzahlen unter sich sind, $r_2 - r_1$ durch k getheilt werden können, was der obigen Voraussetzung widerspricht. Hieraus erhellet, daß ρ stets k verschiedener Werthe, also aller ganzen Werthe von $-\frac{k}{2}$ angefangen bis $+\frac{k}{2}$ fähig ist, wobei, wenn k eine gerade Zahl bedeutet, die beiden Grenzwerthe einander gleich gelten, da sie bei einem und demselben Werthe von r Statt finden können.

Man hat nun $\frac{2 r h \pi}{k} = 2 q \pi + \frac{2 \rho \pi}{k}$, folglich

$$\cos. \frac{2 r h \pi}{k} = \cos. \frac{2 \rho \pi}{k}, \quad \sin. \frac{2 r h \pi}{k} = \sin. \frac{2 \rho \pi}{k},$$

daher auch

$$\cos. \frac{2 r h \pi}{k} + \sqrt{-1}\, \sin. \frac{2 r h \pi}{k} = \cos. \frac{2 \rho \pi}{k} + \sqrt{-1}\, \sin. \frac{2 \rho \pi}{k}.$$

Hieraus erhellet, daß die Anzahl der verschiedenen Werthe der Potenz $\sqrt[k]{1^h}$ bloß von den Werthen der Zahl ρ abhängt, also begrenzt ist.

Da aber die Differenz der Werthe, welche der Bogen $\frac{2 \rho \pi}{k}$ für zwei verschiedene Werthe von ρ annimmt, offenbar kleiner ist als 2π, so ergeben sich, wenn man alle zwischen $-\frac{k}{2}$ und $+\frac{k}{2}$ liegenden ganzen Zahlen, und falls k gerade ist, auch noch eine der genannten Grenzen statt ρ setzt, k Paare correspondirender Werthe von $\cos. \frac{2 \rho \pi}{k}$ und $\sin. \frac{2 \rho \pi}{k}$, deren keines mit dem andern genau übereinstimmt, und somit hat die Wurzelgröße $\sqrt[k]{1^h}$, wenn h, k ganze, keinen gemeinschaftlichen Factor besitzende Zahlen sind, die k verschiedenen Werthe:

$\cos.\frac{2\pi}{k}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{k}$,	$\cos.\frac{2\pi}{k}-\sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{k}$,
$\cos.\frac{4\pi}{k}+\sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{k}$,	$\cos.\frac{4\pi}{k}-\sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{k}$,
$\cos.\frac{6\pi}{k}+\sqrt{-1}\sin.\frac{6\pi}{k}$,	$\cos.\frac{6\pi}{k}-\sqrt{-1}\sin.\frac{6\pi}{k}$,
. . . .	. . . .

welche so lange fortzusetzen sind, bis der Coëfficient von π entweder $=k-1$ oder $=k$ geworden ist. Im letzten Falle, welcher sich für ein gerades k ereignet, gelten die letzten Glieder beider Reihen bloß für ein Glied, und dieses ist $\cos.\pi+\sqrt{-1}\sin.\pi=-1$. Auch sieht man, daß die angeführten Werthe der Größe $\sqrt[k]{1^h}$ von h gar nicht abhängen, daher hat $\sqrt[k]{1^h}$ genau dieselben Werthe wie $\sqrt[k]{1}$.

Es sey z. B. $h=1$, $k=3$. Wir finden wegen $\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

$$\cos.\frac{2\pi}{3}=-\sin.\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},\ \sin.\frac{2\pi}{3}=\cos.\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

also hat $\sqrt[3]{1}$ die drei Werthe:

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

von deren Richtigkeit man sich auch durch Bildung ihrer dritten Potenzen leicht überzeugt.

Für $\sqrt[4]{1}$ ergeben sich die Werthe

$$1,\quad \cos.\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin.\frac{\pi}{2},\quad \cos.\frac{\pi}{2}-\sqrt{-1}\sin.\frac{\pi}{2},\quad -1$$

oder $1,\quad \sqrt{-1},\quad -\sqrt{-1},\quad -1.$

In der That ist

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt{\sqrt{1}}=\pm\sqrt{\pm 1},$$

woraus diese vier Werthe sogleich folgen.

Ist der Exponent der Potenz 1^m keine rationale Zahl, so ist die Zahl, welche wir oben mit ρ bezeichnet haben, mit der Einheit incommensurabel, folglich ist die Anzahl der Werthe dieser Potenz unbegrenzt.

Sie bilden die unendliche Reihe

1

$\cos. 2m\pi + \sqrt{-1}\,\sin. 2m\pi,$	$\cos. 2m\pi - \sqrt{-1}\,\sin. 2m\pi,$
$\cos. 4m\pi + \sqrt{-1}\,\sin. 4m\pi,$	$\cos. 4m\pi - \sqrt{-1}\,\sin. 4m\pi,$
$\cos. 6m\pi + \sqrt{-1}\,\sin. 6m\pi,$	$\cos. 6m\pi - \sqrt{-1}\,\sin. 6m\pi,$
. . . .	. . . .

Aus den hier angestellten Betrachtungen erhellet nun, daß die Potenzen

$$(\cos. \alpha + \sqrt{-1}\,\sin. \alpha)^m$$

$$\text{und}\quad (p + q\sqrt{-1})^m,$$

wenn m einen rationalen gebrochenen Werth besitzt, welchem, nachdem er durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt worden ist, der Nenner k zukommt, nothwendig k verschiedene Werthe zulassen; und daß diesen Potenzen unendlich viele Werthe entsprechen, wenn m mit der Einheit incommensurabel ist.

Die Werthe der Potenz $(-1)^m$ verdienen ihres häufigen Gebrauches wegen noch eine Erwähnung. Da das Binom $\cos. \alpha + \sqrt{-1}\,\sin. \alpha$ in -1 übergeht, wenn man $\alpha = \pi$ setzt, so ist die allgemeine Form derselben

$$\cos. m(2r+1)\pi + \sqrt{-1}\,\sin. m(2r+1)\pi,$$

aus welcher sie hervorgehen, wenn man statt r alle ganzen positiven und negativen Zahlen substituirt.

Man kann demnach den Ausdruck

$$\cos. mr\pi + \sqrt{-1}\,\sin. mr\pi$$

als die allgemeine Form aller Werthe von $(\pm 1)^m$ aufstellen, wobei r alle geraden oder ungeraden Zahlen bedeutet, je nachdem man die positive oder die negative Einheit potenzirt. Auch ist, wenn man $(\pm 1)^m$ in der erwähnten Vieldeutigkeit nimmt, für jede Zahl p

$$(73)\qquad (\pm p)^m = p^m \,.\, (\pm 1)^m.$$

Siebzehnte Vorlesung.

Über die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen eines Bogens für jeden Werth des Multiplicators.

1. Es sey $\sin. \alpha = x$ und $\cos. \alpha = y$, so werden, wie wir in der vorhergehenden Vorlesung gezeigt haben, alle Werthe der Potenz

$$(y + x\sqrt{-1})^m$$

durch den Ausdruck

$$\cos. m(\alpha + 2r\pi) + \sqrt{-1}\, \sin. m(\alpha + 2r\pi)$$

angegeben, wenn man in demselben alle ganzen positiven und negativen Zahlen statt r setzt.

Da $(y + x\sqrt{-1})^m = y^m \left(1 + \frac{x}{y}\sqrt{-1}\right)^m$ ist, so findet man mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes

$$(y + x\sqrt{-1})^m = y^m \left[1 - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{y^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{y^4} - \text{etc.} \right.$$
$$\left. + \sqrt{-1}\left(\frac{m}{1} \cdot \frac{x}{y} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{y^3} + \text{etc.}\right)\right];$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(74) \quad \begin{cases} P = y^m\left(1 - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{y^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{y^4} - \text{etc.}\right) \\ Q = y^m\left(\frac{m}{1} \cdot \frac{x}{y} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{y^3} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

seyn läßt:

$$(75) \quad (y + x\sqrt{-1})^m = \cos. m(\alpha + 2r\pi) + \sqrt{-1}\, \sin. m(\alpha + 2r\pi)$$
$$= P + Q\sqrt{-1}.$$

Die Reihen P und Q convergiren nur, so lange $\frac{x}{y}$ die Einheit nicht übersteigt, d. h. so lange x nicht größer ist als y, was mittelst der in der fünften und sechsten Vorlesung vorgetragenen Regeln erkannt wird. Die Vieldeutigkeit des Binoms $P + Q\sqrt{-1}$ rührt hier bloß von dem beiden Theilen gemeinschaftlichen Factor y^m her.

Ist y positiv, so läßt die Potenz y^m gewiß einen reellen Werth zu. Nimmt man diesen für y^m, so sind P und Q reelle Größen, und die Gleichung (75) gibt

P als einen der Werthe von $\cos. m(\alpha + 2r\pi)$
und Q als einen der Werthe von $\sin. m(\alpha + 2r\pi)$.

Es handelt sich also nur noch um die genauere Bestimmung dieser Werthe.

Wir können hier α offenbar als den kleinsten der unzähligen Bogen betrachten, welchen der Sinus x und der Cosinus y zukommt. Da $\frac{x}{y}$ der Convergenz der Reihen P und Q wegen nicht größer seyn darf als die Einheit, so fällt der numerische Werth von α zwischen o und $\frac{\pi}{4}$, und sein Zeichen stimmt mit jenem des Sinus x überein. Der jedesmalige Werth von α übt auf die Bedeutung der ganzen Zahl r keinen Einfluß aus. Denn wäre dieß der Fall, so müßte r sich ändern, wenn α sich veränderte; es gäbe also wenigstens zwei Werthe von α, z. B. α_1 und α_2, deren einem $r = r_1$, und deren anderem $r = r_2$ zugehörte, wie nahe auch immer α_2 an α_1 liegen mag.

Für diese Werthe von α wäre

$$\cos. m(\alpha_2 + 2r_2\pi) - \cos. m(\alpha_1 + 2r_1\pi) =$$
$$= -2\sin. m\left[\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} + (r_2+r_1)\pi\right] . \sin. m\left[\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} + (r_2-r_1)\pi\right]$$

und

$$\sin. m(\alpha_2 + 2r_2\pi) - \sin. m(\alpha_1 + 2r_1\pi) =$$
$$= 2\cos. m\left[\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} + (r_2+r_1)\pi\right] . \sin. m\left[\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} + (r_2-r_1)\pi\right],$$

also bei der unendlichen Annäherung von α_2 an α_1:

$$\lim. [\cos. m(\alpha_2 + 2r_2\pi) - \cos. m(\alpha_1 + 2r_1\pi)] =$$
$$= -2\sin. m[\alpha_1 + (r_2+r_1)\pi] \sin. m(r_2 - r_1)\pi$$

und

$$\lim. [\sin. m(\alpha_2 + 2r_2\pi) - \sin. m(\alpha_1 + 2r_1\pi)] =$$
$$= 2\cos. m[\alpha_1 + (r_2+r_1)\pi] \sin. m(r_2 - r_1)\pi,$$

welche beide Grenzen, da r_2 und r_1 ungleiche ganze Zahlen seyn sollen, im Allgemeinen, d. h. abgesehen von besonderen Werthen der Zahl m, von o verschieden ausfallen müßten. Diesem Resultate widerspricht aber die Beschaffenheit der Reihen P und Q.

Denn convergirt überhaupt eine Reihe, wie

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots\ldots$$

für zwei Werthe von z, nämlich $z = z_1$ und $z = z_2 = z_1 + \zeta$, und sind S_1, S_2 die denselben entsprechenden Summen dieser Reihe, also

$$S_1 = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + a_3 z_1^3 + a_4 z_1^4 + \ldots\ldots$$
$$S_2 = a_0 + a_1 (z_1 + \zeta) + a_2 (z_1 + \zeta)^2 + a_3 (z_1 + \zeta)^3 + a_4 (z_1 + \zeta)^4 + \ldots\ldots,$$

so erhält man, wenn man den zweiten Ausdruck mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes entwickelt, und den ersten davon abzieht, eine convergirende Reihe von der Form

$$A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + A_4 \zeta^4 + \ldots\ldots,$$

wobei die Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4 .... von ζ frei sind, deren Summe $= S_2 - S_1$ ist.

Darf man hiebei ζ so klein annehmen, als man will, ohne die Convergenz von S_2 aufzuheben, so hat man in Bezug auf das unendlich klein Werden von ζ, d. h. in Bezug auf die unendliche Annäherung von z_2 an z_1:

$$\lim. (S_2 - S_1) = 0.$$

Sind nun P_1, P_2; Q_1, Q_2 die den oben erwähnten Substitutionen $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ zugehörigen Werthe von P, Q, so überzeugt man sich leicht, daß bei dem unendlichen Abnehmen des Unterschiedes $\alpha_2 - \alpha_1$,

$$\lim. (P_2 - P_1) = 0 \quad \text{und} \quad \lim. (Q_2 - Q_1) = 0$$

ist; wäre demnach r von α abhängig, so könnte für $\alpha = \alpha_1$ durchaus nicht

$$P = \cos. m(\alpha + 2r\pi) \quad \text{und} \quad Q = \sin. m(\alpha + 2r\pi)$$

werden, gegen das oben Bewiesene.

Es ist also r von α unabhängig, und deßhalb bedarf es zur vollständigen Kenntniß von r nur der Bestimmung dieser ganzen Zahl für irgend einen speciellen Werth von α. Am tauglichsten hiezu ist die Annahme $\alpha = 0$; sie gibt $x = 0$, $y = 1$, $\frac{x}{y} = 0$, $P = 1$, $Q = 0$, folglich

$$\cos. 2mr\pi = 1, \quad \sin. 2mr\pi = 0.$$

Diese zwei Gleichungen können nur dann bestehen, wenn mr eine ganze Zahl ist; aber hiedurch wird

$$\cos. m(\alpha + 2r\pi) = \cos. m\alpha, \quad \sin. m(\alpha + 2r\pi) = \sin. m\alpha,$$

folglich sind wir unter den gehörigen Beschränkungen berechtigt

$$\cos. m\alpha = P \quad \text{und} \quad \sin. m\alpha = Q$$

zu setzen.

Wir haben somit, wenn α zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ fällt, die Formeln:

$$(76)\quad \cos. m\alpha = y^m - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2y^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4y^{m-4} - \text{etc.}$$

$$\sin. m\alpha = mxy^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3y^{m-3} + \text{etc.}$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so brechen dieselben ab, und gelten, weil dann die obige Entwickelung nicht mehr an die Bedingung gebunden ist, daß $\frac{x}{y}$ die Einheit nicht überschreite, für alle Werthe des Bogens α. Sie enthalten das Bildungsgesetz der in der fünfzehnten Vorlesung gefundenen Ausdrücke (37).

II. Da $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ und x stets kleiner als die Einheit ist, so lassen sich sämmtliche Potenzen von y mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes in convergirende, nach den steigenden Potenzen von x geordnete Reihen umstalten. Führt man diese Reihen in die Formeln (76) ein, so erhält man, wenn man sich der Kürze wegen der in der siebenten Vorlesung gebrauchten Zeichen für die Binomialcoefficienten bedient:

$$\cos. m\alpha = 1 - \left.\begin{matrix}\binom{\frac{m}{2}}{1}\\ -\binom{m}{2}\end{matrix}\right\}x^2 + \left.\begin{matrix}\binom{\frac{m}{2}}{2}\\ +\binom{m}{2}\binom{\frac{m-2}{2}}{1}\\ +\binom{m}{4}\end{matrix}\right\}x^4 - \left.\begin{matrix}\binom{\frac{m}{2}}{3}\\ -\binom{m}{2}\binom{\frac{m-2}{2}}{2}\\ -\binom{m}{4}\binom{\frac{m-4}{2}}{1}\\ -\binom{m}{6}\end{matrix}\right\}x^6 + \text{etc.}$$

$$\sin. m\alpha = mx - \left.\begin{matrix}\binom{m}{1}\binom{\frac{m-1}{2}}{1}\\ -\binom{m}{3}\end{matrix}\right\}x^3 \left.\begin{matrix}+\binom{m}{1}\binom{\frac{m-1}{2}}{2}\\ +\binom{m}{3}\binom{\frac{m-3}{2}}{1}\\ +\binom{m}{5}\end{matrix}\right\}x^5 \left.\begin{matrix}-\binom{m}{1}\binom{\frac{m-1}{2}}{3}\\ -\binom{m}{3}\binom{\frac{m-3}{2}}{2}\\ -\binom{m}{5}\binom{\frac{m-5}{2}}{1}\\ -\binom{m}{7}\end{matrix}\right\}x^7 + \text{etc.}$$

Der Coefficient von x^{2r} in der ersten Reihe ist, ohne Rücksicht auf sein Zeichen:

$$\binom{\frac{m}{2}}{r} + \binom{m}{2}\binom{\frac{m-2}{2}}{r-1} + \binom{m}{4}\binom{\frac{m-4}{2}}{r-2} + \binom{m}{6}\binom{\frac{m-6}{2}}{r-3} + \cdots + \binom{m}{2r}.$$

Man bringt ihn, wenn man statt der Symbole die Binomial-Coefficienten selbst schreibt, ohne Mühe auf die Form:

$$\binom{\frac{m}{2}}{r}\left[1+\frac{(m-1)r}{1\,.\,1}+\frac{(m-1)(m-3)r(r-1)}{1\,.\,3\,.\,1\,.\,2}\right.$$
$$\left.+\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\,.\,r(r-1)(r-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,1\,.\,2\,.\,3}+ \text{ꝛc.}\right].$$

Die Reihe innerhalb den Klammern geht aus der in der zehnten Vorlesung betrachteten allgemeinen Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\text{ꝛc.}$$

hervor, wenn man $\alpha=-\frac{m-1}{2}$, $\beta=-r$, $\gamma=\frac{1}{2}$ seyn läßt, und kann daher nach der an dem angeführten Orte erhaltenen Formel (9) summirt werden. Ihre Summe ist

$$=\frac{\Pi\left(\frac{1}{2}-1\right).\,\Pi\left(\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}+r-1\right)}{\Pi\left(\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}-1\right).\,\Pi\left(\frac{1}{2}+r-1\right)}=\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right).\,\Pi\left(\frac{m-2}{2}+r\right)}{\Pi\left(\frac{m-2}{2}\right).\,\Pi\left(-\frac{1}{2}+r\right)}.$$

Bedeutet r, wie es hier der Fall ist, eine ganze positive Zahl, so besteht die Gleichung

$$\Pi(z+r)=(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+r)\,.\,\Pi(z).$$

Setzt man in derselben $z=-\frac{1}{2}$, und dann $z=\frac{m-2}{2}$, so erhält man:

$$\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}+r\right)}=\frac{2}{1}\,.\,\frac{2}{3}\,.\,\frac{2}{5}\ldots\ldots\frac{2}{2r-1},$$

$$\frac{\Pi\left(\frac{m-2}{2}+r\right)}{\Pi\left(\frac{m-2}{2}\right)}=\frac{m}{2}\,.\,\frac{m+2}{2}\,.\,\frac{m+4}{2}\ldots\ldots\frac{m+2(r-1)}{2},$$

daher ist die genannte Summe

$$=\frac{m(m+2)(m+4)\ldots[m+2(r-1)]}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2r-1)}.$$

Nun ist $\binom{\frac{m}{2}}{r}=\frac{m(m-2)(m-4)\ldots[m-2(r-1)]}{2\,.\,4\,.\,6\ldots\ldots 2r}$,

folglich wird der numerische Werth des Coefficienten von x^{2r} in der Reihe $\cos.\,m\alpha$ auf den Ausdruck

$$\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)\ldots[m^2-(2r-2)^2]}{1.2.3.4.5.6.7.8\ldots(2r-1).2r}$$

reducirt. Wendet man dieses Resultat auf jedes Glied der Reihe $\cos. m\alpha$ an, so findet man

$$(77)\ \cos. m\alpha = 1 - \frac{m^2}{1.2}x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}x^4 - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \text{ꝛc.}$$

Obschon diese Reihe für jeden Werth des Sinus x convergirt, so sind wir, der Prämissen zu Folge, von welchen wir ausgingen, nur berechtiget, dieselbe für jene Werthe von x zuzulassen, welche sich auf die Grenzen $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\alpha = +\frac{\pi}{4}$ beziehen. Denn die Reihe (76), auf welcher die Entwickelung von (77) beruht, divergirt, wenn $\alpha > \pm\frac{\pi}{4}$ wird, und verstattet daher keinen sicheren Schluß. Indessen kann die Gültigkeit der Reihe (77) für alle den Quadranten $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreitende Werthe von α leicht nachgewiesen werden. Denn setzt man in derselben $\frac{\alpha}{2}$ statt α, und 2m statt m; so wird $\cos. m\alpha$ durch die steigenden Potenzen von $\sin.\frac{\alpha}{2}$ ausgedrückt, und dabei ist es erlaubt α von o angefangen bis $\pm\frac{\pi}{2}$ auszudehnen, weil dann $\frac{\alpha}{2}$ nicht größer wird als $\pm\frac{\pi}{4}$. Es ist aber $\sin.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{2}}$ und $\cos.\alpha = \sqrt{1-x^2}$, daher kann jede der genannten Potenzen von $\sin.\frac{\alpha}{2}$ in eine nach den steigenden Potenzen von x geordnete, für jedes x convergirende Reihe aufgelöst werden, wodurch es möglich wird, $\cos. m\alpha$ in eine nach den steigenden Potenzen des Sinus x fortschreitende Reihe umzustalten, welche für alle Werthe des Bogens α, von o angefangen bis $\pm\frac{\pi}{2}$ besteht. Aber eine Function einer veränderlichen Größe läßt sich nur auf eine Art durch eine Reihe darstellen, welche nach den steigenden Potenzen dieser Veränderlichen geordnet ist (siebente Vorlesung); daher muß die jetzt für $\cos. m\alpha$ erhaltene Reihe, so lange α zwischen o und $\pm\frac{\pi}{4}$ bleibt, mit der Formel (77) genau übereinstimmen, und da die Voraussetzung $\alpha > \pm\frac{\pi}{4}$ auf den Gang der so eben beschriebenen Rechnung keinen Einfluß auszuüben vermag, so kann diese Reihe keine andere seyn als die Reihe (77), welche demnach für alle Werthe von α, innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ angenommen werden darf.

Durch ein ähnliches Verfahren ergibt sich

$$(78)\quad sin.\, m\alpha = mx - \frac{m(m^2-1^2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^5 - \text{rc.}$$

$$\left[\alpha = -\frac{\pi}{2},\quad \alpha = +\frac{\pi}{2}\right].$$

Man kann aber die Reihen (76) nach Absonderung des Factors y auch so schreiben:

$$cos.\, m\alpha = y\left[y^{m-1} - \binom{m}{2}x^2y^{m-3} + \binom{m}{4}x^4y^{m-5} - \ldots\right],$$

$$sin.\, m\alpha = y\left[mxy^{m-2} - \binom{m}{3}x^3y^{m-4} + \binom{m}{5}x^5y^{m-6} - \ldots\right].$$

Schafft man in den Reihen innerhalb den Klammern die Potenzen von y, wie es oben geschehen ist, weg, so erhält man nach gehöriger Summirung der Coefficienten des Resultates:

$$(79)\quad cos.\, m\alpha = y\left[1 - \frac{m^2-1}{1\,.\,2}x^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4 - \ldots\right],$$

$$(80)\quad sin.\, m\alpha = y\left[mx - \frac{m(m^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^5 - \ldots\right]$$

$$\left[\alpha = -\frac{\pi}{2},\quad \alpha = +\frac{\pi}{2}\right].$$

Für $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ werden aber diese Formeln unbrauchbar, weil dann die Reihen innerhalb den Klammern divergiren.

Die Formeln (77) und (80) brechen ab, wenn m eine gerade, und die Formeln (78) und (79) brechen ab, wenn m eine ungerade ganze Zahl ist. Sie stellen das Bildungsgesetz der in der fünfzehnten Vorlesung gefundenen Ausdrücke (40) und (41) dar.

Achtzehnte Vorlesung.

Über die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen eines Bogens für jeden Werth des Multiplicators.

(Fortsetzung.)

III. Wir haben bis jetzt nur die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen solcher Bogen betrachtet, welche einen Quadranten nicht übersteigen. Sollen die Functionen der Vielfachen irgend eines andern Bogens in Reihen umgeformt werden, so theile man denselben durch die halbe Peripherie: der Rest der Division kann, wenn man nöthigen Falls den nächst größeren Quotienten zu Hülfe nimmt, immer so eingerichtet werden, daß er, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, nicht größer ausfällt, als $\frac{\pi}{2}$. Es läßt sich also der gegebene Bogen auf die Form $r\pi + \alpha$ bringen, wobei r eine ganze Zahl, und α einen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen anzeigt.

Nun ist

$$\cos. m(r\pi + \alpha) = \cos. mr\pi \cos. m\alpha - \sin. mr\pi \sin. m\alpha,$$
$$\sin. m(r\pi + \alpha) = \sin. mr\pi \cos. m\alpha + \cos. mr\pi \sin. m\alpha,$$

folglich braucht man nur die in der vorhergehenden Vorlesung für $\cos. m\alpha$ und $\sin. m\alpha$ gefundenen Reihen in diese Gleichungen zu substituiren, um $\cos. m(r\pi + \alpha)$ und $\sin. m(r\pi + \alpha)$ durch die steigenden Potenzen von $\sin. \alpha$, und wenn α zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ fällt, durch jene von $\frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$ auszudrücken.

In dem besonderen Falle, wenn m eine rationale Zahl ist, und r durch den Nenner q ihres einfachsten Ausdruckes $\frac{p}{q}$ ohne Rest getheilt werden kann, reducirt sich das Product mr auf eine ganze Zahl, und die Formeln für $\cos. m(r\pi + \alpha)$ und $\sin. m(r\pi + \alpha)$ werden einfacher. Denn nun ist $\sin. mr\pi = 0$ und $\cos. mr\pi = \pm 1$, je nachdem mr den Factor 2 enthält oder nicht, und man hat:

$$\cos. m(r\pi + \alpha) = \pm \cos. m\alpha, \quad \sin. m(r\pi + \alpha) = \pm \sin. m\alpha.$$

Hieher gehört auch der Fall, wenn m eine ganze Zahl ist; er entspricht der Annahme $q = 1$.

Erhält hingegen das Product $m r$ in seiner einfachsten Gestalt eine rationale Form mit dem Nenner 2, was sich dann ereignet, wenn $m = \frac{p}{2q}$ ist, und r durch q, nicht aber durch 2q sich theilen läßt, so wird $\cos. m r \pi = 0$ und $\sin. m r \pi = \pm 1$, je nachdem $\frac{m r - 1}{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet; folglich

$$\cos. m (r \pi + \alpha) = \mp \sin. m \alpha, \quad \sin. m (r \pi + \alpha) = \pm \cos. m \alpha.$$

IV. Um $\cos. m (r \pi \pm \alpha)$ und $\sin. m (r \pi \pm \alpha)$, wobei α positiv und nicht größer ist als $\frac{\pi}{2}$, in Reihen zu verwandeln, welche nach den Potenzen von $\cos. \alpha$, oder falls α nicht kleiner ist als die Hälfte eines Quadranten, nach den Potenzen von $\frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$ geordnet sind, gebe man dem Bogen $r \pi \pm \alpha$ die Form

$$\left(r \pm \frac{1}{2}\right) \pi \mp \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

und es wird

$$\cos. m (r \pi \pm \alpha) = \cos. \frac{m (2r \pm 1) \pi}{2} \cos. m \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$\pm \sin. \frac{m (2r \pm 1) \pi}{2} \sin. m \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$
$$\sin. m (r \pi \pm \alpha) = \sin. \frac{m (2r \pm 1) \pi}{2} \cos. m \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$\mp \cos. \frac{m (2r \pm 1) \pi}{2} \sin. m \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

wobei sich $\cos. m \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ und $\sin. m \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ mittelst der Formeln der vorhergehenden Vorlesung durch $\sin. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos. \alpha$, und wenn α nicht kleiner, also $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nicht größer ist, als $\frac{\pi}{4}$, durch $\frac{\sin. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$ ausdrücken lassen.

Setzt man hier $r = 0$, so hat man insbesondere:

$$\cos. m\alpha = \cos.\frac{m\pi}{2}\cos. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \sin.\frac{m\pi}{2}\sin. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\sin. m\alpha = \sin.\frac{m\pi}{2}\cos. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \cos.\frac{m\pi}{2}\sin. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Ist m eine rationale Zahl $= \frac{p}{q}$, wobei p, q keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und kann $2r \pm 1$ durch q ohne Rest getheilt werden, was nur dann angeht, wenn q ungerade ist, so folgt, wenn man $\frac{2r \pm 1}{q} = t$ setzt, wobei auch t ungerade seyn muß:

$$\cos.\frac{m(2r \pm 1)\pi}{2} = \cos.\frac{pt\pi}{2} \text{ und } \sin.\frac{m(2r \pm 1)\pi}{2} = \sin.\frac{pt\pi}{2}.$$

Es kommt nun darauf an, ob p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Im ersten Falle wird $\sin.\frac{pt\pi}{2} = 0$ und $\cos.\frac{pt\pi}{2} = \pm 1$, je nachdem $\frac{p}{2}$ gerade oder ungerade ausfällt; im zweiten Falle wird $\cos.\frac{pt\pi}{2} = 0$ und $\sin.\frac{pt\pi}{2} = \pm 1$, je nachdem $\frac{pt-1}{2}$ gerade oder ungerade ist; folglich hat man im ersten Falle

$$\cos. m(r\pi \pm \alpha) = (-1)^{\frac{p}{2}}\cos. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\sin. m(r\pi \pm \alpha) = \mp(-1)^{\frac{p}{2}}\sin. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

und im zweiten:

$$\cos. m(r\pi \pm \alpha) = \pm(-1)^{\frac{pt-1}{2}}\sin. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\sin. m(r\pi \pm \alpha) = (-1)^{\frac{pt-1}{2}}\cos. m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Unter dem ersten dieser Fälle ist auch jener begriffen, wenn m einen geraden, und unter dem zweiten jener, wenn m einen ungeraden ganzen Werth besitzt.

Man sieht also, daß sich die Ausdrücke für $\cos. m(r\pi \pm \alpha)$ und $\sin. m(r\pi \pm \alpha)$ nicht vereinfachen lassen, wenn m eine rationale Zahl mit einem geraden Nenner bedeutet.

V. Die Formeln, welche $\cos. m\alpha$ und $\sin. m\alpha$, falls m eine ganze positive oder negative Zahl ist, in begrenzten, nach den Potenzen von $\cos.\alpha = y$ geordneten Polynomen darstellen, verdienen noch eine nähere Betrachtung. Sie sind, wie sich aus dem so eben Gesagten leicht ergibt, wenn $\sin.\alpha = x$ gesetzt wird,

für ein gerades m:

$$(81)\quad \cos. m\alpha = (-1)^{\frac{m}{2}}\left[1 - \frac{m^2}{1.2}y^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}y^4 - \ldots\ldots\right],$$

$$(82)\quad \sin. m\alpha = (-1)^{\frac{m}{2}+1} x \left[my - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}y^3 + \ldots\ldots\right];$$

und für ein ungerades m:

$$(83)\quad \cos. m\alpha = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[my - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}y^3 + \ldots\ldots\right],$$

$$(84)\quad \sin. m\alpha = (-1)^{\frac{m-1}{2}} x\left[1 - \frac{m^2-1^2}{1.2}y^2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}y^4 - \ldots\right].$$

Da $\cos.(-m\alpha) = \cos. m\alpha$ und $\sin.(-m\alpha) = -\sin. m\alpha$ ist, so werden wir m bloß als eine ganze positive Zahl betrachten.

Legt man den Gliedern des Ausdruckes (81) von der Linken gegen die Rechte nach der Ordnung die Zeiger 0, 1, 2, 3 . . . . bei, so ist das dem Zeiger r zugehörige Glied, da es mit + oder — verbunden erscheint, je nachdem r gerade oder ungerade ist, mit Berücksichtigung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $(-1)^{\frac{m}{2}}$ offenbar

$$(-1)^{\frac{m}{2}+r} \cdot \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots[m^2-(2r-4)^2][m^2-(2r-2)^2]}{1.2.3.4.5.6\ldots(2r-3)(2r-2)(2r-1)2r}y^{2r}.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes führt den Zeiger $\frac{m}{2}$; schreibt man nun sämmtliche Glieder desselben in verkehrter Ordnung, und gibt man denselben von der Linken gegen die Rechte neuerdings die Zeiger 0, 1, 2, 3 . . ., so erhält man das mit dem Zeiger r versehene Glied, wenn man in der obigen Form r mit $\frac{m}{2} - r$ vertauscht. Dieses Glied ist also

$$= (-1)^{m-r} \cdot \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots[m^2-(m-2r-4)^2]\,[m^2-(m-2r-2)^2]}{1.2.3.4.5.6\ldots(m-2r-3)(m-2r-2)(m-2r-1)(m-2r)}y^{m-2r}.$$

Nun ist, weil m eine gerade Zahl bedeutet:

$$(-1)^{m-r} = (-1)^{-r} = (-1)^r;$$

ferner $\quad m^2 = m.m = 2.m.\frac{m}{2}$

$$m^2 - 2^2 = (m+2)(m-2) = 2^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

$$m^2 - 4^2 = (m+4)(m-4) = 2^2\left(\frac{m}{2}+2\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)$$

. . . .

$$m^2-(m-2r-4)^2=(2m-2r-4)(2r+4)=2^2(m-r-2)(r+2)$$
$$m^2-(m-2r-2)^2=(2m-2r-2)(2r+2)=2^2(m-r-1)(r+1),$$

also $\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\ldots[m^2-(m-2r-2)^2]}{1.2.3.4 \;.\; 5.6\ldots\ldots(m-2r-1)(m-2r)}=$

$$=\frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots(\frac{1}{2}m+2)(\frac{1}{2}m+1)\,\frac{1}{2}m\,(\frac{1}{2}m-1)\ldots(r+2)(r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(m-2r-1)(m-2r)}\cdot 2^{m-2r-1}$$
$$=\frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots\ldots(m-2r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;r}\,2^{m-2r-1},$$

wovon man sich durch Reduction der beiden letzten Brüche auf einerlei Nenner leicht überzeugt; daher hat man

$$(-1)^{m-r}\cdot\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\ldots[m^2-(m-2r-2)^2]}{1.2\;.\;3.4\;.\;5.6\ldots\ldots(m-2r-1)(m-2r)}\cdot y^{m-2r}=$$
$$=(-1)^r\cdot\frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots\ldots(m-2r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;r}\cdot 2^{m-2r-1}\,y^{m-2r}.$$

Die allgemeine Form der Glieder des Ausdruckes (83) ist, wenn man denselben von der Linken gegen die Rechte die Zeiger 0, 1, 2, 3.... ertheilt:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+r}\cdot\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\ldots[m^2-(2r-3)^2][m^2-(2r-1)^2]}{1\;.\;2.3\;.\;4.5\ldots\ldots(2r-2)(2r-1)\;2r(2r+1)}\,y^{2r+1}.$$

Dem letzten Gliede gehört der Zeiger $\frac{m-1}{2}$; um also die Glieder des erwähnten Ausdruckes in verkehrter Ordnung mit den Zeigern 0, 1, 2, 3 .... zu erhalten, muß man überhaupt r mit $\frac{m-1}{2}-r$ verwechseln. Das Glied, welchem dabei der Zeiger r zu Theil wird, ist

$$(-1)^{m-1-r}\cdot\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(m-2r-4)^2]\;[m^2-(m-2r-2)^2]}{1\;.\;2.3\;.\;4.5\ldots(m-2r-3)(m-2r-2)(m-2r-1)(m-2r)}\,y^{m-2r}.$$

Hier hat man, weil m eine ungerade Zahl vorstellt:

$$(-1)^{m-1-r}=(-1)^{-r}=(-1)^r;$$

ferner $m^2-1=2^2\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)$

$$m^2-3^2=2^2\left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}\right)$$

. . . .

$$m^2-(m-2r-4)^2=2^2(m-r-2)(r+2)$$
$$m^2-(m-2r-2)^2=2^2(m-r-1)(r+1),$$

also $\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(m-2r-4)^2]\;[m^2-(m-2r-2)^2]}{1.2.3.4.5\ldots(m-2r-3)(m-2r-2)(m-2r-1)(m-2r)} =$

$$= \frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots\frac{1}{2}(m+1)\frac{1}{2}(m-1)\ldots(r+2)(r+1)}{1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots(m-2r-1)(m-2r)} 2^{m-2r-1}$$

$$= \frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-2r+1)}{1.2.3.4.5\ldots\ldots r} 2^{m-2r-1};$$

und daher auch hier

$$(-1)^{m-1-r} . \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(m-2r-2)^2]}{1.2.3.4.5\ldots(m-2r-1)(m-2r)} y^{m-2r} =$$

$$= (-1)^r . \frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-2r+1)}{1.2.3\ldots r} 2^{m-2r-1} y^{m-2r}.$$

Man kann also die Ausdrücke (81) und (83), wenn man ihre Glieder in verkehrter Ordnung auf einander folgen läßt, in einen zusammenziehen, und für jedes ganze positive m

$$(85)\quad \cos. m\alpha = 2^{m-1} y^m - m 2^{m-3} y^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2} 2^{m-5} y^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} 2^{m-7} y^{m-6} + \ldots$$

setzen, wobei die Glieder der Formel so lange fortzuführen sind, bis man auf ein Glied stößt, dessen Zähler den Factor o enthält.

Jedoch können wir nicht unterlassen, zu bemerken, daß die Reihe

$$2^{m-1} y^m - m 2^{m-3} y^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2} 2^{m-5} y^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} 2^{m-7} y^{m-6} + \text{etc.}$$

für ein ganzes positives m in das Unendliche fortgesetzt, keineswegs abbricht, sondern nur innerhalb eines bestimmten Intervalles mit verschwindenden Gliedern versehen ist. Es werden nämlich bloß jene Glieder $= 0$, deren Coefficienten die Nulle als Factor enthalten. Diesen Gliedern entsprechen die Zeiger

$$\frac{m}{2}+1,\quad \frac{m}{2}+2,\quad \frac{m}{2}+3\ \ldots\ldots\ldots m-1$$

oder $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m+1}{2}+1$, $\frac{m+1}{2}+2 \ldots\ldots\ldots m-1$,

je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die Glieder, welchen die folgenden Zeiger

$$m,\ m+1,\ m+2,\ m+3\ldots\ldots$$

zukommen, sind, wie eine einfache Ueberlegung des in obiger Reihe herrschenden Gesetzes lehrt:

$$-2^{-m-1}y^{-m} - m2^{-m-3}y^{-m-2} - \frac{m(m+3)}{1\,.\,2}\,.\,2^{-m-5}y^{-m-4}$$
$$- \frac{m(m+4)(m+5)}{1\,.\,2\,.\,3}2^{-m-7}y^{-m-6} - \text{etc.},$$

so daß man, wenn man dem Bildungsgesetze der Formel (85) unbedingt gehorchen wollte, $2\cos. m\alpha$ für ein ganzes positives m als die Summe der beiden divergirenden unendlichen Reihen

$$(2y)^m - m(2y)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}(2y)^{m-4} + \text{etc.}$$

$$(2y)^{-m} + m(2y)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{1\,.\,2}(2y)^{-m-4} + \text{etc.}$$

darstellen müßte.

Auf dieselbe Art geben die Formeln (82) und (84) für jedes ganze positive m:

$$(86)\quad \sin. m\alpha = x\Big((2y)^{m-1} - (m-2)(2y)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1\,.\,2}(2y)^{m-5}$$
$$- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\,.\,2\,.\,3}(2y)^{m-7} + \ldots\Big),$$

wenn man die Glieder der Reihe innerhalb den Klammern so weit fortsetzt, bis eines derselben gleich Null wird. Auch hier finden die obigen Bemerkungen Anwendung.

Neunzehnte Vorlesung.

Über einige Folgerungen aus den Ergebnissen der vorhergehenden Vorlesungen.

Die Elementar-Geometrie lehrt, daß jeder Kreisbogen größer ist, als seine Sehne, und so lange derselbe eine gewisse, die halbe Peripherie übertreffende Grenze nicht erreicht, kleiner als die Summe der zu seinen Endpuncten gezogenen Tangenten, von den genannten Puncten bis zu ihrem Durchschnittspuncte gerechnet. Es fällt also auch die Hälfte jedes solchen Bogens zwischen die Hälfte seiner Sehne und eine seiner Tangenten. Ist 2ω ein mit dem Halbmesser 1 beschriebener Bogen, so ist die Hälfte seiner Sehne $= \sin.\omega$, und wie man leicht findet, jede der beiden Tangenten $= \frac{\sin.\omega}{\cos.\omega}$, daher ist unter der Voraussetzung $\omega < \frac{\pi}{2}$ nothwendig

$$\sin.\omega < \omega \quad \text{und} \quad \frac{\sin.\omega}{\cos\omega} > \omega,$$

$$\text{also} \quad \frac{\sin.\omega}{\omega} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\sin.\omega}{\omega} > \cos.\omega.$$

Bei dem unendlichen Abnehmen von ω nähert sich $\cos.\omega$ ohne Ende der Einheit, daher wird

$$\lim. \frac{\sin.\omega}{\omega} = 1,$$

und man darf demnach einen unendlich klein werdenden Bogen seinem Sinus substituiren.

Dieß vorausgesetzt, schreiben wir in den Formeln (76) $\frac{a}{m}$ statt a, so haben wir:

$$\cos.a = \left(\cos.\frac{a}{m}\right)^m - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\left(\sin.\frac{a}{m}\right)^2\left(\cos.\frac{a}{m}\right)^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\sin.\frac{a}{m}\right)^4\left(\cos.\frac{a}{m}\right)^{m-4} - \text{etc.}$$

$$\sin.a = m\left(\sin.\frac{a}{m}\right)\left(\cos.\frac{a}{m}\right)^{m-1}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\sin.\frac{a}{m}\right)^3\left(\cos.\frac{a}{m}\right)^{m-3} + \text{etc.}$$

Wird hier m unendlich groß, also $\frac{\alpha}{m}$ unendlich klein, so ergibt sich, wenn man auf die Grenzen übergeht:

$$(87)\quad \begin{cases} \cos.\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.} \\ \sin.\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.} \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für jeden Werth von α, weil, wie groß auch immer α seyn mag, doch wie es die Formeln (76) fordern, zuletzt $\frac{\alpha}{m} < \frac{\pi}{4}$ wird. Sie dienen zur Berechnung des Cosinus und des Sinus, wenn der Bogen gegeben ist. Ihre Convergenz für jedes α erhellet auch aus der fünften Vorlesung.

Es ist ferner der zweiten der Formeln (76) gemäß:

$$\frac{\sin.m\alpha}{m} = y^m \left[\frac{x}{y} - \frac{(m-1)(m-2)}{2\ .\ 3}\frac{x^3}{y^3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}\frac{x^5}{y^5} - \text{ꝛc.}\right],$$

wobei $x = \sin.\alpha$, $y = \cos.\alpha$ gesetzt wird.

Läßt man hier m unendlich abnehmen, so nähert sich $\frac{\sin.m\alpha}{m}$ ohne Ende dem Bogen α, und y^m ohne Ende der Einheit, und man findet

$$(88)\quad \alpha = \frac{x}{y} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{x}{y}\right)^7 + \text{ꝛc.},$$

wobei α nothwendig zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ fällt.

Diese Reihe dient zur Berechnung des kleinsten, einem positiven Cosinus gehörenden Bogens. Nur muß man, wenn der Sinus den Cosinus, numerisch betrachtet, übersteigt, beide Functionen mit einander verwechseln, und die Ergänzung des verlangten Bogens zum Quadranten suchen.

Setzt man $\frac{x}{y} = 1$, so wird $\alpha = \frac{\pi}{4}$, und man hat die von Leibnitz zuerst gefundene Reihe

$$(89)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots,$$

welche zwar convergirt, aber doch zur Berechnung des Werthes von π nicht bequem genug ist.

Nimmt man jedoch in (88) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, wofür $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, also $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ wird, so ergibt sich

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right) \text{ oder}$$

$$(90) \quad \pi = \sqrt{12}\left[1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right],$$

welche Reihe bei weitem schneller convergirt, als die vorhergehende. Dennoch muß man über zwanzig Glieder entwickeln, um sich auf die zehnte Decimalstelle des Resultates verlassen zu können. Die Rechnung selbst gibt

$$\pi = 3{\cdot}14159265358 \ldots.$$

Mit Hülfe der Formeln (87) findet man

$$\cos.a + \sqrt{-1}\,\sin.a = 1 + \frac{a\sqrt{-1}}{1} + \frac{(a\sqrt{-1})^2}{1\,.\,2} + \frac{(a\sqrt{-1})^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{(a\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$= e^{a\sqrt{-1}},$$

wobei e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Es ist also, wenn man $a + 2r\pi$ statt a schreibt, wobei r irgend eine ganze positive oder negative Zahl anzeigt:

$$(91) \quad \cos.a + \sqrt{-1}\,\sin.a = e^{(a+2r\pi)\sqrt{-1}},$$

$$(92) \quad l(\cos.a + \sqrt{-1}\,\sin.a) = (a + 2r\pi)\sqrt{-1}.$$

Zu denselben Resultaten führt auch die Gleichung

$$\cos.a + \sqrt{-1}\,\sin.a = [\cos.m(a+2r\pi) + \sqrt{-1}\,\sin.m(a+2r\pi)]^{\frac{1}{m}},$$

wenn man m unendlich abnehmen läßt.

Die Formel (92) gibt über die Natur der Logarithmen wichtige Aufschlüsse. Setzen wir in derselben $a = 0$, also $\cos.a = 1$, $\sin.a = 0$, so haben wir

$$l(1) = 2r\pi\sqrt{-1}.$$

Es hat also der Logarithmus der positiven Einheit unendlich viele Werthe; einer derselben, nämlich jener, welcher der Annahme $r = 0$ entspricht, ist $= 0$, und die übrigen sind imaginär.

Setzen wir aber $a = \pi$, so haben wir $\cos.a = -1$, $\sin.a = 0$; also

$$l(-1) = (2r + 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Es hat nämlich der Logarithmus der negativen Einheit unendlich viele, aber bloß imaginäre Werthe.

Jede Zahl $\pm a$ kann als das Product von ± 1 mit a betrachtet werden; daher ist

$$la + l(\pm 1)$$

die allgemeine Formel aller Werthe des Logarithmus der Zahl $\pm a$, in welcher $l(\pm 1)$ in der so eben nachgewiesenen Vieldeutigkeit zu nehmen ist. Man sieht hieraus, daß jeder Zahl unendlich viele Logarithmen gehören, wovon aber, wenn die Zahl positiv ist, nur einer, und wenn sie negativ ist, keiner einen reellen Werth besitzt.

Die Gleichungen (91) und (92) führen auf merkwürdige analytische Gebilde. Setzt man z. B. in (91) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so wird $\cos.\alpha = 0$, $\sin.\alpha = 1$, folglich

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{(4r+1)\pi}{2}\sqrt{-1}};$$

und wenn man beide Theile dieser Gleichung in Bezug auf den Exponenten $\sqrt{-1}$ potenzirt:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{(4r+1)\pi}{2}}.$$

Nimmt man in (91) α positiv und negativ, und $r=0$, so erhält man durch Verbindung der dabei sich ergebenden Gleichungen:

$$(93)\qquad \cos.\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin.\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Lassen wir in der Gleichung (78) nämlich in

$$\sin.m\alpha = mx - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}x^5 - \text{etc.}$$

$$\left[\alpha = -\frac{\pi}{2},\ \alpha = +\frac{\pi}{2}\right]$$

den Multiplicator m unendlich abnehmen, so erhalten wir wegen $\lim.\frac{\sin.m\alpha}{m} = \alpha = Arc.\sin.x$, wenn wir unter $Arc.\sin.x$ den kleinsten Bogen verstehen, dessen Sinus $=x$ ist,

$$(94)\quad Arc.\sin.x = x + \frac{1.1}{1.2.3}x^3 + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \text{etc.}$$

$$= x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \text{etc.}$$

Auf demselben Wege finden wir mit Hülfe der Gleichung

$$(80)\ \sin.m\alpha = y\left[mx - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5}x^5 - \dots\right]$$

$$(95)\quad Arc.sin.x = \sqrt{1-x^2}\left(x + \frac{2.2}{1.2.3}x^3 + \frac{2.2.4.4}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{2.2.4.4.6.6}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + ..\right)$$

$$= \sqrt{1-x^2}\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \ldots\right).$$

Es sey in der Formel (78) $a = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich

$$sin.\ \frac{m\pi}{2} = m\left(1 - \frac{m^2 - 1^2}{1.2.3} + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right).$$

Die Reihe innerhalb den Klammern hat die Form

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} + \ldots,$$

wenn $\alpha = \frac{-m-1}{2}$, $\beta = \frac{m-1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$ gesetzt wird, und läßt sich daher nach der bekannten Formel summiren.

Man findet

$$(96)\qquad sin.\ \frac{m\pi}{2} = \frac{m\,\Pi\left(\frac{1}{2}\right).\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{m}{2}\right).\Pi\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Lassen wir hier m unendlich klein werden, so folgt, wegen

$$lim.\ \frac{sin.\frac{m\pi}{2}}{m} = \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$lim.\,\Pi\left(-\frac{m}{2}\right).\Pi\left(\frac{m}{2}\right) = \Pi(0).\Pi(0) = 1$$

$$(97)\qquad \frac{\pi}{2} = \Pi\left(\frac{1}{2}\right).\Pi\left(-\frac{1}{2}\right),$$

daher

$$(98)\qquad \frac{\frac{m\pi}{2}}{sin.\frac{m\pi}{2}} = \Pi\left(\frac{m}{2}\right).\Pi\left(-\frac{m}{2}\right);$$

oder, wenn man z statt $\frac{m}{2}$ schreibt:

$$(99)\qquad \frac{\pi z}{sin.\ \pi z} = \Pi(z).\Pi(-z).$$

Nun ist, der in der neunten Vorlesung gegebenen Erklärung der Function $\Pi(z)$ zufolge, in Bezug auf das unendliche Wachsen der ganzen positiven Zahl n:

$$\Pi(z) = lim. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot n^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)},$$

$$\Pi(-z) = lim. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot n^{-z}}{(-z+1)(-z+2)(-z+3)\ldots(-z+n)},$$

folglich

$$(100) \quad \frac{\pi z}{sin.\, \pi z} = lim. \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2}{(1^2-z^2)(2^2-z^2)(3^2-z^2)\ldots(n^2-z^2)}$$

oder

$$(101) \quad sin.\, \pi z = \pi z (1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\left(1-\frac{z^2}{16}\right) \ldots \text{ꝛc.}$$

Die Gleichung (97) läßt sich, da wegen

$$\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z)$$

$$\Pi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\Pi(-\tfrac{1}{2}) \text{ ist,}$$

auch unter den Formen

$$(102) \quad \sqrt{\pi} = \Pi(-\tfrac{1}{2}) = 2\,\Pi(\tfrac{1}{2}) \text{ vorstellen.}$$

Aus diesen, wie auch aus (101), wenn man daselbst $z = \frac{1}{2}$ annimmt, folgt der merkwürdige, von **Wallis** zuerst gefundene Ausdruck

$$(103) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \ldots}.$$

Setzt man in (101) $\frac{1}{2} - z$ statt z, nachdem man die dort vorfindigen Differenzen der Quadrate in ihre einfachen Factoren zerlegt hat, so erhält man:

$$cos.\, \pi z =$$

$$\pi\left(\frac{1}{2}-z\right)\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{3}{2}-z\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{z}{2}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{z}{2}\right)\left(\frac{5}{6}+\frac{z}{3}\right)\ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}(1-4z^2)\left(1-\frac{4}{9}z^2\right)\left(1-\frac{4}{25}z^2\right)\ldots,$$

folglich wegen (103):

$$(104) \quad cos.\, \pi z = (1-4z^2)\left(1-\frac{4}{9}z^2\right)\left(1-\frac{4}{25}z^2\right)\ldots$$

Die unendlichen Factorenfolgen (101), (103), (104) sind zwar zur Berechnung von $sin.\, \pi z$, $\frac{\pi}{2}$, $cos.\, \pi z$ ihrer geringen Convergenz wegen nicht anwendbar, jedoch können sie, wenn es sich um die Logarithmen der genannten Größen handelt, mit Vortheil gebraucht werden.

So ist z. B.

$$(105) \quad l\,sin.\, \pi z = l\pi + lz + l(1-z^2) + l\left(1-\frac{z^2}{4}\right) + l\left(1-\frac{z^2}{9}\right) + l\left(1-\frac{z^2}{16}\right) + \ldots,$$

folglich, wenn man die Logarithmen der Binome nach der Formel (6) der achten Vorlesung entwickelt, und nach den Potenzen von z ordnet, unter der Voraussetzung $z < 1$:

$$(106)\quad l\,\sin.\pi z = l\pi + lz - z^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$
$$- \frac{z^4}{2}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right)$$
$$- \frac{z^6}{3}\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots\right)$$
$$- \text{ꝛc.}$$

Die Gleichung (101) gibt noch

$$(107)\quad \frac{\sin.\pi y}{\sin.\pi z} = \frac{y}{z}\left(\frac{1-y}{1-z}\right)\left(\frac{1+y}{1+z}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{2}y}{1-\frac{1}{2}z}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{2}y}{1+\frac{1}{2}z}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{3}y}{1-\frac{1}{3}z}\right)\ldots$$
$$= \frac{y}{z}\left(\frac{1-y}{1-z}\right)\left(\frac{1+y}{1+z}\right)\left(\frac{2-y}{2-z}\right)\left(\frac{2+y}{2+z}\right)\left(\frac{3-y}{3-z}\right)\left(\frac{3+y}{3+z}\right)\ldots$$
$$= \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)\left(1 - \frac{y-z}{1-z}\right)\left(1 + \frac{y-z}{1+z}\right)\left(1 - \frac{y-z}{2-z}\right)\ldots$$

Es sey $y - z = x$, also $y = z + x$, so hat man

$$(108)\quad \frac{\sin.\pi(z+x)}{\sin.\pi z} = \left(1 + \frac{x}{z}\right)\left(1 - \frac{x}{1-z}\right)\left(1 + \frac{x}{1+z}\right)\left(1 - \frac{x}{2-z}\right) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{x}{2+z}\right)\left(1 - \frac{x}{3-z}\right)\left(1 + \frac{x}{3+z}\right)\ldots$$

Zwanzigste Vorlesung.

Über den Gebrauch der Moivre'schen Formel bei der Summirung einiger Reihen.

I. Es seyen die Reihen

$$\cos.\alpha + x\cos.(\alpha+\beta) + x^2\cos.(\alpha+2\beta) + x^3\cos.(\alpha+3\beta) + \text{rc.} + x^{n-1}\cos.[\alpha+(n-1)\beta]$$ und

$$\sin.\alpha + x\sin.(\alpha+\beta) + x^2\sin.(\alpha+2\beta) + x^3\sin.(\alpha+3\beta) + \text{rc.} + x^{n-1}\sin.[\alpha+(n-1)\beta]$$

zu summiren.

Setzt man die Summe der ersten $= S_n$, und die Summe der zweiten $= T_n$, so hat man:

$$S_n + T_n\sqrt{-1} = \cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha + x[\cos.(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha+\beta)] + x^2[\cos.(\alpha+2\beta) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha+2\beta)] + \ldots$$
$$\ldots + x^{n-1}[\cos.(\alpha+(n-1)\beta) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha+(n-1)\beta)]$$
$$= (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)[1 + x(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta) + x^2(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)^2 + \ldots$$
$$\ldots + x^{n-1}(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)^{n-1}]$$

wenn man nämlich berücksichtiget, daß allgemein nach (66)

$$\cos.(\alpha+r\beta) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha+r\beta) =$$
$$= (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)(\cos.r\beta + \sqrt{-1}\sin.r\beta),$$

und der Moivre'schen Formel gemäß:

$$\cos.r\beta + \sqrt{-1}\sin.r\beta = (\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)^r$$ ist.

Wir haben es nunmehr bloß mit einer geometrischen Progression zu thun, und finden, der bekannten Summenformel zufolge:

$$S_n + T_n\sqrt{-1} = (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha).\frac{x^n(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)^n - 1}{x(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta) - 1}$$

$$= \frac{x^n[\cos.(\alpha+n\beta) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha+n\beta)] - [\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha]}{x(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta) - 1}$$

$$= \frac{x^n\cos.(\alpha+n\beta) - \cos.\alpha + \sqrt{-1}[x^n\sin.(\alpha+n\beta) - \sin.\alpha]}{x\cos.\beta - 1 + \sqrt{-1}\,x\sin.\beta}.$$

Multipliciren wir den Zähler und den Nenner dieses Bruches

mit $x \cos.\beta - 1 - \sqrt{-1}\,.\,x\sin.\beta$, so verwandelt sich der Nenner in die Summe der zwei Quadrate

$$(x\cos.\beta - 1)^2 \quad \text{und} \quad x^2 \sin.\beta^2,$$

welche jederzeit eine reelle Größe seyn muß, und auch auf die Form

$$1 - 2x\cos.\beta + x^2$$

gebracht werden kann; der Zähler aber bietet zwei Theile dar, wovon einer reell und der andere mit dem Factor $\sqrt{-1}$ verbunden ist; dem Doppelsinne der Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ gemäß kann S_n dem reellen, und $T_n\sqrt{-1}$ dem imaginären Theile des erwähnten Bruches gleich gesetzt werden; daher erhalten wir nach gehöriger Rechnung

$$S_n = \frac{[x^n \cos.(\alpha+n\beta) - \cos.\alpha](x\cos.\beta - 1) + [x^n \sin.(\alpha+n\beta) - \sin.\alpha]\, x\sin.\beta}{1 - 2x\cos.\beta + x^2}$$

und

$$T_n = \frac{[x^n \sin.(\alpha+n\beta) - \sin.\alpha](x\cos.\beta - 1) - [x^n \cos.(\alpha+n\beta) - \cos.\alpha]\, x\sin.\beta}{1 - 2x\cos.\beta + x^2}$$

oder

$$(109)\quad \begin{cases} S_n = \dfrac{x^{n+1}\cos.[\alpha+(n-1)\beta] - x^n\cos.(\alpha+n\beta) - x\cos.(\alpha-\beta) + \cos.\alpha}{1 - 2x\cos.\beta + x^2} \\[2ex] T_n = \dfrac{x^{n+1}\sin.[\alpha+(n-1)\beta] - x^n\sin.(\alpha+n\beta) - x\sin.(\alpha-\beta) + \sin.\alpha}{1 - 2x\cos.\beta + x^2} \end{cases}$$

wodurch also die Summirung der vorgelegten Reihen bewerkstelliget ist.

Lassen wir insbesondere $x = 1$ seyn, so haben wir

$$S_n = \frac{\cos.[\alpha+(n-1)\beta] - \cos.(\alpha+n\beta) - \cos.(\alpha-\beta) + \cos.\alpha}{2(1-\cos.\beta)},$$

$$T_n = \frac{\sin.[\alpha+(n-1)\beta] - \sin.(\alpha+n\beta) - \sin.(\alpha-\beta) + \sin.\alpha}{2(1-\cos.\beta)}.$$

Nun ist den Formeln (48) und (46) gemäß:

$$\cos.[\alpha+(n-1)\beta] - \cos.(\alpha+n\beta) = 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta\,.\sin.[\alpha+(n-\tfrac{1}{2})\beta]$$

$$\sin.[\alpha+(n-1)\beta] - \sin.(\alpha+n\beta) = -2\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.[\alpha+(n-\tfrac{1}{2})\beta],$$

und wenn man hier $n = 0$ annimmt:

$$\cos.(\alpha-\beta) - \cos.\alpha = 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta\,.\sin.(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)$$

$$\sin.(\alpha-\beta) - \sin.\alpha = -2\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta),$$

ferner nach (38) $1-\cos.\beta = 2(\sin.\tfrac{1}{2}\beta)^2$, folglich

$$S_n = \frac{\sin.[\alpha+(n-\frac{1}{2})\beta] - \sin.(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin.\frac{1}{2}\beta},$$

$$T_n = \frac{-\cos.[\alpha+(n-\frac{1}{2})\beta] + \cos.(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin.\frac{1}{2}\beta}.$$

Reducirt man diese Ausdrücke wieder mit Hülfe der so eben gebrauchten Formeln, so ergibt sich

(110) $\cos.\alpha + \cos.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha+2\beta) + \cos.(\alpha+3\beta) + \ldots$

$$\ldots + \cos.[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin.\frac{1}{2}n\beta.\cos.[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\sin.\frac{1}{2}\beta}$$

$$\sin.\alpha + \sin.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+2\beta) + \sin.(\alpha+3\beta) + \ldots$$

$$\ldots + \sin.[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin.\frac{1}{2}n\beta.\sin.[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\sin.\frac{1}{2}\beta},$$

welche Resultate sich zur logarithmischen Rechnung sehr gut eignen, und deßhalb bei der Berechnung der Sinustafeln zur Controlle dienen können.

Auf ähnliche Art werden, wenn man in den obigen allgemeinen Formeln $x = -1$ setzt, die Reihen

$$\cos.\alpha - \cos.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha+2\beta) - \cos.(\alpha+3\beta) + \ldots \pm \cos.[\alpha+(n-1)\beta]$$
$$\sin.\alpha - \sin.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+2\beta) - \sin.(\alpha+3\beta) + \ldots \pm \sin.[\alpha+(n-1)\beta]$$

summirt. Man findet die Summe der ersteren

$$= \frac{\cos.\frac{1}{2}n\beta.\cos.[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\alpha]}{\cos.\frac{1}{2}\beta} \text{ oder } = \frac{\sin.\frac{1}{2}n\beta.\sin.[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\cos.\frac{1}{2}\beta},$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist; und unter denselben Umständen die Summe der letzteren

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}n\beta.\sin.[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\cos.\frac{1}{2}\beta} \text{ oder } = \frac{\sin.\frac{1}{2}n\beta.\cos.[\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\beta]}{\cos.\frac{1}{2}\beta}.$$

Jedoch verdient bemerkt zu werden, daß dieselben Resultate auch aus (110) folgen, wenn man β mit $\pi+\beta$ vertauscht.

Aus den Formeln (109) sieht man zugleich, daß die unendlichen Reihen

$$\cos.\alpha + x\cos.(\alpha+\beta) + x^2\cos.(\alpha+2\beta) + x^3\cos.(\alpha+3\beta) + \text{ꝛc.}$$
$$\sin.\alpha + x\sin.(\alpha+\beta) + x^2\sin.(\alpha+2\beta) + x^3\sin.(\alpha+3\beta) + \text{ꝛc.}$$

convergiren, sobald x numerisch betrachtet kleiner ist, als die Einheit, und daß

$$\frac{\cos.\alpha - x\cos.(\alpha-\beta)}{1-2x\cos.\beta+x^2} \text{ und } \frac{\sin.\alpha - x\sin.(\alpha-\beta)}{1-2x\cos.\beta+x^2}$$

ihre Summen sind. Denn da die Sinusse und Cosinusse die Einheit nie zu übersteigen vermögen, so nehmen die in den angeführten Formeln vorkommenden Glieder

$$x^{n+1} \cos.[\alpha + (n-1)\beta],\ x^n \cos.(\alpha + n\beta),$$
$$x^{n+1} \sin.[\alpha + (n-1)\beta],\ x^n \sin.(\alpha + n\beta)$$

unendlich ab, wenn n unendlich groß wird.

II. Betrachten wir nun die Reihen

$$\cos.\alpha + \binom{m}{1} x \cos.(\alpha+\beta) + \binom{m}{2} x^2 \cos.(\alpha+2\beta) + \binom{m}{3} x^3 \cos.(\alpha+3\beta) + \text{ꝛc.}$$

$$\sin.\alpha + \binom{m}{1} x \sin.(\alpha+\beta) + \binom{m}{2} x^2 \sin.(\alpha+2\beta) + \binom{m}{3} x^3 \sin.(\alpha+3\beta) + \text{ꝛc.}$$

welche entstehen, wenn man die Glieder der Reihe

$$1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots = (1+x)^m$$

beziehungsweise mit den Cosinussen $\cos.\alpha$, $\cos.(\alpha+\beta)$, $\cos.(\alpha+2\beta)$ ꝛc., oder mit den Sinussen $\sin.\alpha$, $\sin.(\alpha+\beta)$, $\sin.(\alpha+2\beta)$ ꝛc. multiplicirt, so wie dieß in I. mit den Gliedern der geometrischen Progression $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ geschehen ist.

Die hier vorgelegten Reihen sind, wenn der numerische Werth von x die Einheit nicht erreicht, immer, und wenn $x = +1$ oder $x = -1$ ist, nur unter der Voraussetzung summirbar, daß m eine positive Zahl vorstellt, oder im ersten Falle, nämlich für $x = +1$, wenigstens zwischen o und -1 liegt. Denn die Reihe

$$1,\ \binom{m}{1} x,\ \binom{m}{2} x^2,\ \binom{m}{3} x^3 \ldots\ldots$$

convergirt nur unter den so eben ausgesprochenen Bedingungen, und die Multiplication ihrer Glieder mit den Cosinussen oder Sinussen befördert ihre Convergenz, ohne jedoch die etwa Statt findende Divergenz nothwendig zu verhindern.

Bezeichnen wir die Summe der ersten Reihe durch P, und jene der zweiten durch Q, so wird

$$\begin{aligned} P + Q\sqrt{-1} = (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)\Big[1 &+ \binom{m}{1} x (\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta) \\ &+ \binom{m}{2} x^2 (\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)^2 \\ &+ \binom{m}{3} x^3 (\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)^3 + \ldots\ldots\Big] \\ = (\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)&[1 + x(\cos.\beta + \sqrt{-1}\sin.\beta)]^m. \end{aligned}$$

Es sey $1 + x\cos.\beta = R\cos.\theta$ und $x\sin.\beta = R\sin.\theta$, so hat man

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(1 + x\cos.\beta)^2 + x^2 \sin.\beta^2} \\ &= \sqrt{1 + 2x\cos\beta + x^2}. \end{aligned}$$

Da $1 + x\, cos.\beta$ nie negativ werden kann, wenn x die Einheit nicht übertrifft, und es immer erlaubt ist, R positiv anzunehmen, so wird θ als ein zwischen die Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fallender Bogen betrachtet werden dürfen.

Wir haben nun

$$P + Q\sqrt{-1} = R^m (cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\, sin.\,\alpha)(cos.\,\theta + \sqrt{-1}\, sin.\,\theta)^m;$$

und da jeder Werth von $(cos.\,\theta + \sqrt{-1}\, sin.\,\theta)^m$ durch

$$cos.\, m(\theta + 2r\pi) + \sqrt{-1}\, sin.\, m(\theta + 2r\pi)$$

vorgestellt wird, wobei r eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet,

$$P + Q\sqrt{-1} = R^m (cos.\alpha + \sqrt{-1}\, sin.\alpha)\,[cos.\, m(\theta + 2r\pi) + \sqrt{-1}\, sin.\, m(\theta + 2r\pi)]$$
$$= R^m [cos.\,(\alpha + m(\theta + 2r\pi)) + \sqrt{-1}\, sin.\,(\alpha + m(\theta + 2r\pi))];$$

folglich, wenn wir unter R^m den reellen Werth verstehen, dessen diese Potenz stets fähig ist:

$$P = R^m\, cos.\,[\alpha + m(\theta + 2r\pi)]$$
$$Q = R^m\, sin.\,[\alpha + m(\theta + 2r\pi)].$$

Da P und Q sich um unendlich wenig ändern, wenn x nur unendlich wenig geändert wird, was aus der Beschaffenheit der durch P und Q vorgestellten Reihen mit leichter Mühe zu ersehen ist, so kann die ganze Zahl r von x nicht abhängen (vergl. die siebzehnte Vorles.). Es reicht also zur vollständigen Kenntniß von r hin, deu Werth dieser Zahl für $x = 0$ zu bestimmen. Unter dieser Annahme wird $P = cos.\,\alpha$, $Q = sin.\,\alpha$, $R = 1$, $cos.\,\theta = 1$, $sin.\,\theta = 0$, also $\theta = 0$, folglich

$$cos.\,\alpha = cos.\,(\alpha + 2rm\pi), \quad sin.\,\alpha = sin.\,(\alpha + 2rm\pi),$$

was nur Statt finden kann, wenn rm eine ganze Zahl ist. Hiedurch erhält man

$$(111) \qquad \begin{aligned} P &= R^m\, cos.\,(\alpha + m\theta) \\ Q &= R^m\, sin.\,(\alpha + m\theta) \end{aligned}$$

als Summenformeln der gegebenen Reihen.

Es sey insbesondere $x = 1$, so wird $R = \sqrt{2(1 + cos.\beta)} = \pm 2\, cos.\frac{\beta}{2}$, wobei man, um R positiv zu erhalten, das obere oder das untere Zeichen nehmen muß, je nachdem $cos.\frac{\beta}{2}$ positiv oder negativ ist. Hiedurch erhält man

$$cos.\,\theta = \frac{1 + cos.\,\beta}{\pm 2\, cos.\,\frac{1}{2}\beta} = \pm\, cos.\,\tfrac{1}{2}\beta,$$

$$sin.\,\theta = \frac{sin.\,\beta}{\pm 2\,cos.\,\frac{1}{2}\beta} = \pm\, sin.\,\tfrac{1}{2}\beta\,;$$

folglich, wenn man θ diesen Bedingungen gemäß bestimmt:

$$(112)\quad cos.\,\alpha + \binom{m}{1} cos.\,(\alpha+\beta) + \binom{m}{2} cos.\,(\alpha+2\beta) + \ldots =$$
$$= (\pm\, 2\,cos.\,\tfrac{1}{2}\beta)^m\, cos.\,(\alpha + m\theta),$$
$$sin.\,\alpha + \binom{m}{1} sin.\,(\alpha+\beta) + \binom{m}{2} sin.\,(\alpha+2\beta) + \ldots =$$
$$= (\pm\, 2\,cos.\,\tfrac{1}{2}\beta)^m\, sin.\,(\alpha + m\theta).$$

Diese Formeln zeigen, wie der reelle Werth von $(\pm\, 2\,cos.\,\frac{1}{2}\beta)^m$ durch Cosinusse oder durch Sinusse von Bögen ausgedrückt wird, welche in einer arithmetischen Progression fortschreiten.

Setzt man $\alpha = m(\lambda + r\pi)$, $\beta = -2(\lambda + r\pi)$, wobei λ zwischen o und π liegt, und r eine ganze Zahl bedeutet, so wird, je nachdem λ zwischen o und $\frac{\pi}{2}$, oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π fällt:

$$cos.\,\theta = \pm\, cos.\,\lambda, \quad sin.\,\theta = \mp\, sin.\,\lambda,$$

also im ersten Falle $\theta = -\lambda$, $\alpha + m\theta = m r \pi$, und im zweiten $\theta = \pi - \lambda$, $\alpha + m\theta = m(r+1)\pi$. Es ist demnach, wenn λ zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ fällt:

$$(113)\quad cos.\,m(\lambda+r\pi) + \binom{m}{1} cos.\,(m-2)(\lambda+r\pi) + \binom{m}{2} cos.\,(m-4)(\lambda+r\pi) + \ldots =$$
$$= (2\,cos.\,\lambda)^m\, cos.\,m r \pi,$$
$$sin.\,m(\lambda+r\pi) + \binom{m}{1} sin.\,(m-2)(\lambda+r\pi) + \binom{m}{2} sin.\,(m-4)(\lambda+r\pi) + \ldots =$$
$$= (2\,cos.\,\lambda)^m\, sin.\,m r \pi;$$

und wenn λ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π enthalten ist:

$$(114)\quad cos.\,m(\lambda+r\pi) + \binom{m}{1} cos.\,(m-2)(\lambda+r\pi) + \binom{m}{2} cos.\,(m-4)(\lambda+r\pi) + \ldots =$$
$$= (-2\,cos.\,\lambda)^m\, cos.\,m(r+1)\pi,$$
$$sin.\,m(\lambda+r\pi) + \binom{m}{1} sin.\,(m-2)(\lambda+r\pi) + \binom{m}{2} sin.\,(m-4)(\lambda+r\pi) + \ldots =$$
$$= (-2\,cos.\,\lambda)^m\, sin.\,m(r+1)\pi.$$

Schreibt man hier 2r statt r, und bedenkt man, daß

$cos.\,2mr\pi + \sqrt{-1}\; sin.\,2mr\pi$ jeden Werth von 1^m,

$cos.\,m(2r+1)\pi + \sqrt{-1}\; sin.\,m(2r+1)\pi$ jeden Werth von $(-1)^m$, und $(2\,cos.\,\lambda)^m \,.\, 1^m$ jeden Werth von $(2\,cos.\,\lambda)^m$ ausdrückt, so lassen sich obige Formeln in folgende zusammenziehen, welche sämmtliche Werthe von $(2\,cos.\,\lambda)^m$ angibt:

$$(115)\quad (2\cos.\lambda)^m = \cos.m(\lambda+2r\pi) + \binom{m}{1}\cos.(m-2)(\lambda+2r\pi) + \binom{m}{2}\cos.(m-4)(\lambda+2r\pi) + \ldots$$
$$+\sqrt{-1}\Big[\sin.m(\lambda+2r\pi) + \binom{m}{1}\sin.(m-2)(\lambda+2r\pi) + \binom{m}{2}\sin.(m-4)(\lambda+2r\pi)+\ldots\Big],$$

wobei man die Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ mit beiden Zeichen nehmen kann. Übrigens läßt sich jede der Formeln (113) und (114) zu einer allgemeinen Darstellung aller Werthe der Potenz $(2\cos.\lambda)^m$ gebrauchen, wenn man dieselbe mit dem allgemeinen Ausdrucke von 1^m multiplicirt.

Setzt man in den Gleichungen (111) $x=-1$, so findet man $R=\sqrt{2(1-\cos.\beta)}=\pm 2\sin.\frac{1}{2}\beta$, je nachdem $\sin.\frac{1}{2}\beta$ positiv oder negativ ist; ferner

$$\cos.\theta = \frac{1-\cos.\beta}{\pm 2\sin.\frac{1}{2}\beta} = \pm \sin.\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$\sin.\theta = \frac{\sin.\beta}{\pm 2\sin.\frac{1}{2}\beta} = \pm \cos.\tfrac{1}{2}\beta,$$

also

$$(116)\quad \cos.\alpha - \binom{m}{1}\cos.(\alpha+\beta) + \binom{m}{2}\cos.(\alpha+2\beta) - \ldots = (\pm 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta)^m \cos.(\alpha+m\theta),$$
$$\sin.\alpha - \binom{m}{1}\sin.(\alpha+\beta) + \binom{m}{2}\sin.(\alpha+2\beta) - \ldots = (\pm 2\sin.\tfrac{1}{2}\beta)^m \sin.(\alpha+m\theta),$$

welche Formeln jede reelle Potenz des Sinus eines gegebenen Bogens darstellen, und dieselben Substitutionen specieller Werthe für α und β zulassen, deren wir uns oben bedient haben.

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Über die anderen in der Analysis gebräuchlichen Kreisfunctionen.

Nebst dem Sinus und Cosinus bedienen sich die Analysten, der Abkürzung und leichteren Übersicht des Calculs wegen, noch anderer Functionen der mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogen. Sie sind die Tangente und Cotangente, die Secante und Cosecante, der Sinusversus und Cosinusversus, und werden durch die dem Zeichen des Bogens vorgesetzten Sylben *tang.* (oder kürzer *tg.*), *cot.*, *sec.*, *cosec.*, *sin. vers.*, *cos. vers.* angedeutet.

Verlängert man den zum Endpuncte eines Bogens gehörenden Halbmesser, bis er die zum Anfangspuncte desselben gezogene berührende Gerade durchschneidet, so heißt das Stück dieser Berührenden zwischen dem Berührungspuncte und dem Durchschnittspuncte die Tangente; und das Stück der Schneidenden zwischen dem Mittelpuncte des Kreises und jenem Durchschnittspuncte die Secante des genannten Bogens. Verrichtet man aber dieselbe Operation in Bezug auf eine durch den Endpunct des (im positiven Sinne gezählten) ersten Quadranten gehende Berührungslinie, so hat man die Cotangente und Cosecante eben desselben Bogens.

Endlich wird das Stück des ersten Hauptdurchmessers, welches zwischen dem Anfangspuncte der Bogen und einem Sinus enthalten ist, der Sinusversus; und das Stück des zweiten Hauptdurchmessers, welches zwischen dem Endpuncte des ersten Quadranten und einem Cosinus liegt, der Cosinusversus des entsprechenden Bogens genannt.

Die Betrachtung der Figur lehrt, daß der Halbmesser mit der Tangente und Secante, wie auch mit der Cotangente und Cosecante rechtwinklige Dreiecke bildet, wovon die Secante und Cosecante die Hypothenusen sind. Man hat also für den Bogen α

(117) $sec.\alpha^2 = 1 + tg.\alpha^2, \quad cosec.\alpha^2 = 1 + cot.\alpha^2.$

Ferner findet man mit Hülfe der ersten Anfangsgründe der Geometrie die Gleichungen:

(118) $sin.\alpha = cos.\alpha \,.\, tg.\alpha, \quad cos.\alpha = sin.\alpha \,.\, cot.\alpha;$

(119) $sin.vers.\alpha = 1 - cos.\alpha$, $cos.vers.\alpha = 1 - sin.\alpha$;
und
(120) $sec.\alpha . cos.\alpha = 1$, $cosec.\alpha . sin.\alpha = 1$, $tg.\alpha . cot.\alpha = 1$;
(121) $tg.\alpha = sin.\alpha . sec.\alpha$, $cot.\alpha = cos.\alpha . cosec.\alpha$, $sec.\alpha = tg.\alpha . cosec.\alpha$;
welche letzteren Gleichungen sich, wenn man will, auch aus (117) und (118) durch eine leichte Rechnung ergeben.

Für den Calcul ist eine genaue Kenntniß der wichtigsten, zwischen allen Kreisfunctionen bestehenden Relationen unentbehrlich. Wir wollen zuerst zeigen, wie jede dieser Functionen durch jede der übrigen ausgedrückt wird, wobei wir jedoch den Sinusversus und Cosinusversus außer Acht lassen, weil diese Functionen nur selten gebraucht werden.

Aus (117) folgt $sec.\alpha = \sqrt{1 + tg.\alpha^2}$ und $tg.\alpha = \sqrt{sec.\alpha^2 - 1}$.

Aus (118) $tg.\alpha = \frac{sin.\alpha}{cos.\alpha}$.

Aus (120) $sec. = \frac{1}{cos.\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin.\alpha^2}}$, $tg.\alpha = \frac{1}{cot.\alpha}$.

Aus (121) $sin.\alpha = \frac{tg.\alpha}{sec.\alpha} = \frac{tg.\alpha}{\sqrt{1 + tg.\alpha^2}} = \frac{\sqrt{sec\ \alpha^2 - 1}}{sec.\alpha}$.

Man ist nun im Stande, folgende Gleichungen aufzustellen:

I. $sin.\alpha =$

$$\sqrt{1 - cos.\alpha^2} = \frac{tg.\alpha}{\sqrt{1 + tg.\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + cot\ \alpha^2}} = \frac{\sqrt{sec.\alpha^2 - 1}}{sec.\alpha} = \frac{1}{cosec.\alpha}.$$

II. $tg.\alpha =$

$$\frac{sin.\alpha}{\sqrt{1 - sin.\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1 - cos.\alpha^2}}{cos.\alpha} = \frac{1}{cot.\alpha} = \sqrt{sec.\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{cosec.\alpha^2 - 1}}.$$

III. $sec.\alpha =$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - sin.\alpha^2}} = \frac{1}{cos.\alpha} = \sqrt{1 + tg.\alpha^2} = \frac{\sqrt{1 + cot\ \alpha^2}}{cot.\alpha} = \frac{cosec.\alpha}{\sqrt{cosec.\alpha^2 - 1}}.$$

Aus den Gleichungen (118) und (120) erhellet, daß, so wie

$sin.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos.\alpha$ und $cos.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin.\alpha$ ist,

auch $tg.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cot.\alpha$ und $cot.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg.\alpha$,

$sec.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cosec.\alpha$ und $cosec.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = s c.\alpha$

seyn muß. Diese Resultate, auf die Formeln I., II, III. angewandt, geben

IV. $\cos.\alpha =$

$$\sqrt{1-\sin.\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{1+tg.\alpha^2}} = \frac{\cot.\alpha}{\sqrt{1+\cot.\alpha^2}} = \frac{1}{\sec.\alpha} = \frac{\sqrt{cosec.^2-1}}{cosec.\alpha}.$$

V. $\cot.\alpha =$

$$\frac{\sqrt{1-\sin.\alpha^2}}{\sin.\alpha} = \frac{\cos.\alpha}{\sqrt{1-\cos.\alpha^2}} = \frac{1}{tg.\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sec.\alpha^2-1}} = \sqrt{cosec.\alpha^2-1}.$$

VI. $cosec.\alpha =$

$$\frac{1}{\sin.\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos.\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1+tg.\alpha^2}}{tg.\alpha} = \sqrt{1+\cot.\alpha^2} = \frac{\sec.\alpha}{\sqrt{\sec.\alpha^2-1}}.$$

Da

$$tg.\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha},\ \cot.\alpha = \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha},\ \sec.\alpha = \frac{1}{\cos.\alpha},\ cosec.\alpha = \frac{1}{\sin.\alpha}$$

ist, so sind die Tangente und Cotangente eines Bogens positiv oder negativ, je nachdem der Sinus und Cosinus desselben einerlei oder verschiedene Zeichen haben; das Zeichen der Secante hingegen stimmt mit jenem des Cosinus, und das Zeichen der Cosecante mit jenem des Sinus überein.

Die Relationen zwischen den Functionen eines Bogens führen auf analoge Formeln für diesen Bogen selbst. Ein Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, hat die Tangente $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, die Secante $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, die Cosecante $\frac{1}{x}$ u. d. gl.; ferner ein Bogen, dessen Tangente $= x$ ist, hat den Sinus $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, die Cotangente $\frac{1}{x}$ u. s. w., welche Beziehungen so ausgedrückt werden:

$$Arc.\sin.x = Arc.tg.\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = Arc.\sec.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = Arc.cosec.\frac{1}{x} = \text{etc.}$$

$$Arc.tg.x = Arc.\sin.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = Arc.\cot.\frac{1}{x} = \text{etc.}$$

Auf diese Art lassen sich eben so viele Gleichungen für die Bogen ansetzen, als in I. — VI. für die Functionen dargestellt erscheinen.

Dividirt man die Gleichungen

$$\sin.(\alpha+\beta) = \sin.\alpha\cos.\beta + \cos.\alpha\sin.\beta$$
$$\cos.(\alpha+\beta) = \cos.\alpha\cos.\beta - \sin.\alpha\sin.\beta$$

durch $\cos.\alpha\cos.\beta$, so erhält man:

(122) $\frac{\sin.(\alpha+\beta)}{\cos.\alpha\,.\,\cos.\beta} = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} + \frac{\sin.\beta}{\cos.\beta} = tg.\alpha + tg.\beta,$

(123) $\frac{\cos.(\alpha+\beta)}{\cos.\alpha\,.\,\cos.\beta} = 1 - \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} \cdot \frac{\sin.\beta}{\cos.\beta} = 1 - tg.\alpha\,.\,tg.\beta,$

und wenn man die erste dieser Gleichungen durch die zweite theilt:

(124) $$tg.(\alpha+\beta) = \frac{tg.\alpha + tg.\beta}{1 - tg.\alpha\,.\,tg.\beta}.$$

Es ist $tg.(-\beta) = -tg.\beta$, folglich hat man auch

(125) $$tg.(\alpha-\beta) = \frac{tg.\alpha - tg.\beta}{1 + tg.\alpha\,.\,tg.\beta}.$$

Ferner ist $cot.(\alpha+\beta) = \frac{1}{tg.(\alpha+\beta)}$, $cot.\alpha = \frac{1}{tg.\alpha}$, $cot.\beta = \frac{1}{tg.\beta}$, folglich $cot.(\alpha+\beta) = \frac{1 - tg.\alpha\,.\,tg.\beta}{tg.\alpha + tg.\beta}$, oder

(126) $$cot.(\alpha+\beta) = \frac{cot.\alpha\,.\,cot.\beta - 1}{cot.\alpha + cot.\beta},$$ und hieraus

$$cot.(\alpha-\beta) = \frac{cot.\alpha\,.\,cot.\beta + 1}{cot.\beta - cot.\alpha}.$$

Den Formeln (45) und (46) in der fünfzehnten Vorlesung zufolge ist

$$\sin.\alpha + \sin.\beta = 2\sin.\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin.\alpha - \sin.\beta = 2\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}\sin.\frac{\alpha-\beta}{2},$$

daher hat man

(127) $$\frac{\sin.\alpha + \sin.\beta}{\sin.\alpha - \sin.\beta} = \frac{tg.\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg.\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Sind α, β Winkel eines Dreieckes, welchen die Seiten a, b gegenüberstehen, so ist

$$\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta} = \frac{a}{b};$$

folglich, wenn man zu beiden Theilen dieser Gleichung die Einheit addirt, und sie davon subtrahirt:

$$\frac{\sin.\alpha + \sin.\beta}{\sin.\beta} = \frac{a+b}{b}, \quad \frac{\sin.\alpha - \sin.\beta}{\sin.\beta} = \frac{a-b}{b},$$

also auch $$\frac{\sin.\alpha + \sin.\beta}{\sin.\alpha - \sin.\beta} = \frac{a+b}{a-b};$$

dieß führt auf die Gleichung:

$$(128). \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{tg.\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg.\,\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

welche einen bekannten trigonometrischen Lehrsatz ausdrückt.

Ist γ der dritte Winkel dieses Dreieckes, so hat man

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ daher}$$

$$tg.\,\frac{\alpha+\beta}{2} = tg.\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = cot.\,\frac{\gamma}{2} \text{ und}$$

$$(129) \qquad tg.\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\,cot.\,\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Diese Gleichung gibt die halbe Differenz der Winkel α, β eines Dreieckes, wenn die denselben gegenüberliegenden Seiten a, b, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ bekannt sind; folglich, da man die halbe Summe dieser Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ kennt, die Winkel α, β selbst.

Durch Combinationen der Gleichungen 45—48 erhält man ohne Mühe noch andere Formeln, welche wir hier füglich übergehen können.

Es ist $sin.\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-cos.\,\alpha}{2}}$ und $cos.\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+cos.\,\alpha}{2}}$, folglich

$$(130) \quad tg.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-cos.\,\alpha}{1+cos.\,\alpha}}, \quad cot.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+cos.\,\alpha}{1-cos.\,\alpha}}.$$

Multiplicirt man den Zähler und den Nenner des Bruches $\frac{1-cos.\,\alpha}{1+cos.\,\alpha}$ ein Mal mit $1+cos.\,\alpha$, und das andere Mal mit $1-cos.\,\alpha$, so ergibt sich

$$(131) \qquad tg.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{sin.\,\alpha}{1+cos.\,\alpha} = \frac{1-cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha}.$$

Setzt man in (130) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ statt α, so folgt

$$(132) \quad tg.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-sin.\,\alpha}{1+sin.\,\alpha}} = cot.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{und} \quad tg.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+sin.\,\alpha}{1-sin\,\alpha}} = cot.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Vermöge (53) ist $\sqrt{\frac{1+sin.\,\alpha}{1-sin.\,\alpha}} = \frac{cos.\,\frac{1}{2}\alpha + sin.\,\frac{1}{2}\alpha}{cos.\,\frac{1}{2}\alpha - sin.\,\frac{1}{2}\alpha}$, folglich auch, wenn man α statt $\frac{\alpha}{2}$ schreibt:

$$(133) \quad tg.\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{cos.\,\alpha + sin.\,\alpha}{cos.\,\alpha - sin.\,\alpha} = \frac{1+tg.\,\alpha}{1-tg.\,\alpha}.$$

Diese Gleichung läßt sich auch aus (124) ableiten.

Aus der Formel (130) erhält man, wenn man 2α statt α setzt:

(134) $$\cos. 2\alpha = \frac{1 - tg.\,\alpha^2}{1 + tg.\,\alpha^2},$$ und hieraus

(135) $$\sec. 2\alpha = \frac{1 + tg.\,\alpha^2}{1 - tg.\,\alpha^2}.$$

Die Gleichung (124) aber gibt für $\alpha = \beta$

(136) $$tg.\,2\alpha = \frac{2\,tg.\,\alpha}{1 - tg.\,\alpha^2},$$ folglich ist

(137) $$\sec. 2\alpha + tg.\,2\alpha = \frac{1 + tg.\,\alpha}{1 - tg.\,\alpha} = tg.\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Um die Tangente und Cotangente eines Bogens in Reihen aufzulösen, welche nach den Potenzen des Bogens fortschreiten, nehmen wir die Gleichung (108) zu Hülfe. Aus derselben folgt, wegen

$$\frac{\sin.\pi(z+x)}{\sin.\pi z} = \frac{\sin.\pi z \cos.\pi x + \cos.\pi z \sin.\pi x}{\sin.\pi z} = \cos.\pi x + \cot.\pi z \sin.\pi x:$$

$$l(\cos.\pi x + \cot.\pi z \sin.\pi x) =$$

$$= l\left(1 + \frac{x}{z}\right) + l\left(1 - \frac{x}{1-z}\right) + l\left(1 + \frac{x}{1+z}\right)$$

$$+ l\left(1 - \frac{x}{2-z}\right) + l\left(1 + \frac{x}{2+z}\right) + l\left(1 - \frac{x}{3-z}\right) + \text{ꝛc.}$$

Nun ist den Formeln (87) gemäß

$$\cos.\pi x + \cot.\pi z\,.\sin.\pi x = 1 + \pi x \cot.\pi z - \frac{\pi^2 x^2}{1\,.\,2} - \frac{\pi^3 x^3 \cot.\pi z}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ꝛc.},$$

folglich (achte Vorles. 5))

$$l(\cos.\pi x + \cot.\pi z\,.\sin.\pi x) = \pi x \cot.\pi z - \frac{\pi^2 x^2}{1\,.\,2} - \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\pi x \cot.\pi z - \frac{\pi^2 x^2}{1\,.\,2} - \text{ꝛc.}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\pi x \cot.\pi x - \frac{\pi^2 x^2}{1\,.\,2} - \text{ꝛc.}\right)^3$$

$$- \text{ꝛc.}$$

Wird die in der obigen Gleichung erscheinende Summe der Logarithmen entwickelt, und nach den Potenzen von x geordnet, so hat man:

$$l\left(1 + \frac{x}{z}\right) + l\left(1 - \frac{x}{1-z}\right) + l\left(1 + \frac{x}{1+z}\right) + l\left(1 - \frac{x}{2-z}\right) + \text{ꝛc.} =$$

$$= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \frac{1}{3+z} - \ldots\right) x$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \ldots\right) x^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(1-z)^3} + \ldots\right) x^3 - \text{ꝛc.}$$

Da hier, wenn x gehörig klein gedacht wird, alle Entwickelungen durch convergirende Reihen vollzogen werden, so müssen die Coefficienten der Potenzen von x in der letzteren Gleichung mit jenen der gehörig geordneten Entwickelung von $l\,(cos.\,\pi x + cot.\,\pi x\, sin\,\pi x)$ übereinstimmen. Beschränken wir uns bloß auf die Betrachtung der Coefficienten der ersten Potenz von x, so erhalten wir die Gleichung:

(138) $$\pi\, cot.\, \pi z =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \frac{1}{3+z} - \text{rc.}$$

$$= \frac{1}{z} - 2z\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2^2-z^2} + \frac{1}{3^2-z^2} + \frac{1}{4^2-z^2} + \ldots\right),$$

und aus dieser wegen

$$\frac{1}{r^2-z^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)^{-1} = \frac{1}{r^2} + \frac{z^2}{r^4} + \frac{z^4}{r^6} + \frac{z^6}{r^8} + \text{rc.}$$

unter der Voraussetzung $z < 1$:

(139) $$cot.\,\pi z = \frac{1}{\pi z} - \frac{2z}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$
$$- \frac{2z^3}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right)$$
$$- \frac{2z^5}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots\right)$$
$$- \text{rc.}$$

Schreibt man aber in der Gleichung (138) $\frac{1}{2} - z$ statt z, so ergibt sich

(140) $$\pi\, tg.\, \pi z =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}-z} - \frac{1}{\frac{1}{2}+z} + \frac{1}{\frac{3}{2}-z} - \frac{1}{\frac{3}{2}+z} + \frac{1}{\frac{5}{2}-z} - \frac{1}{\frac{5}{2}+z} + \text{rc.}$$

$$= 2z\left(\frac{1}{\frac{1}{4}-z^2} + \frac{1}{\frac{9}{4}-z^2} + \frac{1}{\frac{25}{4}-z^2} + \ldots\right) \text{ und}$$

(141) $$tg.\,\pi z = \frac{2^3 z}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{2^5 z}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{2^7 z}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots\right)$$
$$+ \text{rc.}$$

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Über die Existenz und die Form der Wurzeln einer geordneten Gleichung mit einer unbekannten Größe.

Jede Gleichung mit einer unbekannten Größe x läßt sich, nachdem man die Brüche, in deren Nenner x vorkommt, und die Wurzelzeichen, welche sich über x erstrecken, weggeschafft hat, auf die Form

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

bringen, wobei m eine ganze positive, den Grad der Gleichung bestimmende Zahl ist, und die Coefficienten A_0, A_1, A_2, A_3 ... A_{m-1}, A_m was immer für Größen anzeigen, welche x nicht enthalten.

Eine Gleichung vom m^{ten} Grade kann unter obiger Form höchstens aus $m+1$ Gliedern bestehen, wobei in m Gliedern die Unbekannte x als Factor erscheint, und ein Glied, nämlich A_m, von x frei ist. Man nennt die Gleichung in diesem Zustande eine vollständige; fehlen aber einige der $m+1$ Glieder, d. h. sind einige der Größen A_1, A_2, A_3, ... A_m gleich Null, so heißt die Gleichung eine unvollständige.

Jede Größe w, welche an die Stelle der Unbekannten x einer Gleichung

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

gesetzt, dieser Gleichung Genüge leistet, für welche nämlich

$$A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + A_2 w^{m-2} + A_3 w^{m-3} + \ldots + A_{m-1} w^{m-1} + A_m = 0$$

wird, heißt eine Wurzel oder Auflösung der genannten Gleichung.

Eine Gleichung kann mehrere Wurzeln haben. So hat z. B. die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ die Wurzeln $x=1$, $x=2$, $x=3$.

Es gibt aber auch Gleichungen, welchen kein möglicher Werth der unbekannten Größe entspricht, wie es bei der Gleichung $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ der Fall ist. Denn das Quadrat und die vierte Potenz jeder denkbaren Zahl sind positiv, und die Summe dreier positiver Zahlen kann nicht $= 0$ seyn. Dieß zeigt sich auch, wenn man diese Gleichung nach der aus der Elementar-Mathematik bekannten Methode für quadratische

Gleichungen behandelt. Man findet $x^2 = -1 \pm \sqrt{-2}$, folglich $x = \pm \sqrt{-1 \pm \sqrt{-2}}$, welcher Ausdruck keine wirkliche, sondern eine bloß imaginäre Größe darstellt. Da aber die Ausdrücke $+\sqrt{-1+\sqrt{-2}}$, $+\sqrt{-1-\sqrt{-2}}$, $-\sqrt{-1+\sqrt{-2}}$, $-\sqrt{-1-\sqrt{-2}}$ statt x in der Gleichung $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ gesetzt, derselben Genüge leisten, so sieht man dieselben ebenfalls als Wurzeln der erwähnten Gleichung an, und unterscheidet im Allgemeinen zwischen reellen und imaginären Wurzeln der Gleichungen. Letztere sind bloße Rechnungsformen, welche nach den für reelle Größen geltenden Regeln behandelt, den Gleichungen entsprechen.

Eine Gleichung kann sowohl reelle als auch imaginäre Wurzeln zulassen. So hat z. B. die Gleichung $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ die reelle Wurzel -2, und die imaginären $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$.

Aus einer Größe a die m^{te} Wurzel ausziehen, heißt im Grunde nichts anderes, als die Gleichung $x = \sqrt[m]{a}$ oder $x^m - a = 0$ auflösen. Aus der sechzehnten Vorlesung wissen wir, daß derselben m Auflösungen zugehören, wovon aber wenigstens $m - 2$ imaginär sind. Hiedurch wird auch die in der Lehre von den Gleichungen Statt findende Ausdehnung des Wortes W u r z e l über seine in den Elementen übliche Bedeutung gerechtfertigt.

Es ist übrigens leicht eine Gleichung zu bilden, welcher gegebene Wurzeln $w_1, w_2, w_3, \ldots$ zukommen. Man multiplicire die Binome $x - w_1, x - w_2, x - w_3, \ldots$ mit einander, und bezeichne ihr Product durch X. Ist nun Z eine willkürliche ganze rationale Function von x, so ist $XZ = 0$ die verlangte Gleichung, in welcher man aber der Einfachheit wegen auch $Z = 1$ annehmen kann. Denn $X = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots$ verschwindet offenbar, wenn man w_1 oder w_2 oder $w_3 \ldots$ statt x setzt, folglich verschwindet dabei auch jedes andere Product XZ.

Es bietet sich uns nun die Frage dar, ob es allgemein erlaubt sey, jeder Gleichung mit einer unbekannten Größe eine, wenn gleich imaginäre, Wurzel zuzuschreiben?

Wir werden dieselbe beantworten, indem wir mit Cauchy (Cours d'Analyse, Chap. X.) beweisen, daß jede ganze rationale Function einer veränderlichen Größe x, nämlich

$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$,
in welcher die von x freien Coefficienten A_0, A_1, $A_2 \ldots A_m$ reelle, oder auch imaginäre Größen von der Form $p + q\sqrt{-1}$ sind, wobei p, q reelle Größen anzeigen, gewiß durch reelle oder wenigstens durch imaginäre, an die so eben genannte Form gebundene Werthe von x auf Null reducirt werden könne.

Es ist zu unserem Zwecke hinreichend, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung der reellen Größen u, v nachzuweisen, daß die Substitution

$$x = u + v\sqrt{-1}$$

der Gleichung $f(x) = 0$ Genüge leistet. Alle reellen Werthe von x sind ohnehin unter der Form $u + v\sqrt{-1}$ begriffen, wenn man $v = 0$ annimmt.

Jede Potenz von $u + v\sqrt{-1}$ mit einem ganzen positiven Exponenten gibt, nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, einen geschlossenen Ausdruck von derselben Form; da nun auch A_0, A_1, $A_2 \ldots A_m$ dieselbe Form besitzen, so erhält man, wenn man $u + v\sqrt{-1}$ statt x in $f(x)$ setzt, ein Resultat von der Form

$$\varphi(u, v) + \sqrt{-1}\,\psi(u, v),$$

wobei $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ reelle Functionen von u, v vorstellen.

Da eine reelle Größe keiner imaginären gleich seyn kann, so hängt die Möglichkeit, die Gleichung

$$f(u + v\sqrt{-1}) = \varphi(u, v) + \sqrt{-1}\,\psi(u, v) = 0$$

durch reelle Werthe von u und v zu realisiren, bloß von der Möglichkeit ab, solche reelle Werthe von u, v zu finden, daß die beiden Gleichungen

$$\varphi(u, v) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(u, v) = 0$$

Statt finden. Aber $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ erhalten ihrer Beschaffenheit zufolge für reelle Werthe von u gleichfalls reelle Werthe; daher sind die Quadrate derselben nie negativ, und es wird deßhalb den obigen zwei Gleichungen durch dieselben reellen Werthe von u, v Genüge geleistet, welche der Gleichung

$$[\varphi(u, v)]^2 + [\psi(u, v)]^2 = 0$$

entsprechen. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$[\varphi(u, v)]^2 + [\psi(u, v)]^2 = F(u, v),$$

so haben wir nur zu beweisen, daß die Gleichung

$$F(u, v) = 0$$

stets durch reelle Werthe von u, v auflösbar sey.

Um die Function $F(u, v)$ auf dem bequemsten Wege darzustellen, sey $u + v\sqrt{-1} = z(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)$, wobei $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist; ferner seyen die Coefficienten

$$A_0 = R_0(\cos.\alpha_0 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_0),$$
$$A_1 = R_1(\cos.\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_1),$$
$$A_2 = R_2(\cos.\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_2) \text{ ꝛc.},$$
$$A_m = R_m(\cos.\alpha_m + \sqrt{-1}\sin.\alpha_m),$$

so erhalten wir mit Zuziehung des Moivre'schen Satzes:

$$\begin{aligned} f(u + v\sqrt{-1}) = & R_0 z^m [\cos.(\alpha_0 + m\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_0 + m\omega)] \\ & + R_1 z^{m-1}[\cos.(\alpha_1 + (m-1)\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_1 + (m-1)\omega)] \\ & + R_2 z^{m-2}[\cos.(\alpha_2 + (m-2)\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_2 + (m-2)\omega)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + R_{m-1} z[\cos.(\alpha_{m-1} + \omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_{m-1} + \omega)] \\ & + R_m(\cos.\alpha_m + \sqrt{-1}\sin.\alpha_m), \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = & R_0 z^m \cos.(\alpha_0 + m\omega) + R_1 z^{m-1}\cos.[\alpha_1 + (m-1)\omega] \\ & + R_2 z^{m-2}\cos.[\alpha_2 + (m-2)\omega] + \ldots \\ & \ldots + R_{m-1} z\cos.(\alpha_{m-1} + \omega) + R_m \cos.\alpha_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & R_0 z^m \sin.(\alpha_0 + m\omega) + R_1 z^{m-1}\sin.[\alpha_1 + (m-1)\omega] \\ & + R_2 z^{m-2}\sin.[\alpha_2 + (m-2)\omega] + \ldots \\ & \ldots + R_{m-1} z\sin.(\alpha_{m-1} + \omega) + R_m \sin.\alpha_m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(u, v) = & R_0^2 z^{2m} + 2R_0 R_1 z^{2m-1}\cos.(\alpha_0 - \alpha_1 + \omega) \\ & + [R_1^2 + 2R_0 R_2 \cos.(\alpha_0 - \alpha_2 + 2\omega)] z^{2m-2} + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhellet, daß die Function $F(z, \omega)$ nur dann endliche Werthe annimmt, wenn die Größe z, d. h. wenn die Größen u, v endliche Werthe erhalten, denn diese Function wächst immer unendlich, sobald u, v, also auch z, unendlich groß werden. Aus dem Ursprunge der Function $F(u, v)$ ist überdieß klar, daß sie für reelle Werthe von u, v nie negativ ausfällt; es wird daher unter allen Werthen, deren $F(u, v)$ fähig ist, einer, z. B. der den Substitutionen $u = u_0$, $v = v_0$ zugehörige Werth $F(u_0, v_0)$ der kleinste seyn. Wir werden nun zeigen, daß derselbe nothwendig $= 0$ ist.

Berechnen wir zu diesem Zwecke den Werth von $F(u_0+\lambda, v_0+\mu)$, wobei λ, μ beliebige reelle Größen bedeuten, wozu wir von der ursprünglichen Function $f(x)$ selbst ausgehen wollen. Setzen wir in derselben $x=u_0+v_0\sqrt{-1}+\xi$, und ordnen wir das mittelst des binomischen Lehrsatzes entwickelte Resultat nach den steigenden Potenzen von ξ, so erhalten wir

$$f(u_0+v_0\sqrt{-1}+\xi)=B_0+B_1\xi+B_2\xi^2+\ldots+B_{m-1}\xi^{m-1}+B_m\xi^m$$

wobei die aus den Bestandtheilen von A_0, A_1, $A_2 \ldots A_m$ und aus u_0, v_0 gebildeten Größen B_0, B_1, $B_2 \ldots B_{m-1}$, B_m sich auf die Formen

$$S_0(\cos.\beta_0+\sqrt{-1}\sin.\beta_0),\quad S_1(\cos.\beta_1+\sqrt{-1}\sin.\beta_1),$$
$$S_2(\cos.\beta_2+\sqrt{-1}\sin.\beta_2) \text{ ꝛc.}$$

bringen lassen. Nehmen wir hier $\xi=\lambda+\mu\sqrt{-1}$ an, so wird, wenn wir dieser Größe die Form $\rho(\cos.\theta+\sqrt{-1}\sin.\theta)$ geben:

$$f[u_0+\lambda+(v_0+\mu)\sqrt{-1}] =$$
$$=S_0(\cos.\beta_0+\sqrt{-1}\sin.\beta_0)+S_1\rho[\cos.(\beta_1+\theta)+\sqrt{-1}\sin(\beta_1+\theta)]$$
$$+S_2\rho^2[\cos.(\beta_2+2\theta)+\sqrt{-1}\sin.(\beta_2+2\theta)]+\ldots.$$
$$\ldots.+S_m\rho^m[\cos.(\beta_m+m\theta)+\sqrt{-1}\sin.(\beta_m+m\theta)],$$

folglich ist im Sinne der oben gewählten Bezeichnung:

$$\varphi(u_0+\lambda, v_0+\mu)=S_0\cos.\beta_0+S_1\rho\cos.(\beta_1+\theta)+S_2\rho^2\cos.(\beta_2+2\theta)+\ldots.$$
$$\ldots.+S_m\rho^m\cos.(\beta_m+m\theta)$$
$$\psi(u_0+\lambda, v_0+\mu)=S_0\sin.\beta_0+S_1\rho\sin.(\beta_1+\theta)+S_2\rho^2\sin.(\beta_2+2\theta)+\ldots.$$
$$\ldots.+S_m\rho^m\sin.(\beta_m+m\theta),$$

und demnach, wegen $F(u, v)=[\varphi(u, v)]^2+[\psi(u, v)]^2$, wenn man die Functionen φ und ψ bei dem Quadriren als Binome behandelt:

$$F(u_0+\lambda, v_0+\mu) =$$
$$= S_0^2+2S_0S_1\rho\cos.(\beta_0-\beta_1-\theta)+2S_0S_2\rho^2\cos.(\beta_0-\beta_2-2\theta)+$$
$$\ldots\ldots+2S_0S_m\rho^m\cos.(\beta_0-\beta_m-m\theta)$$
$$+[S_1\rho\cos.(\beta_1+\theta)+\ldots.+S_m\rho^m\cos.(\beta_m+m\theta)]^2$$
$$+[S_1\rho\sin.(\beta_1+\theta)+\ldots.+S_m\rho^m\sin.(\beta_m+m\theta)]^2.$$

Setzt man $\lambda=0$, $\mu=0$, so wird auch $\rho=0$, weil $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ ist, und die obige Gleichung gibt

$$F(u_0, v_0) = S_0^2.$$

so haben wir nur zu beweisen, daß die Gleichung

$$F(u, v) = 0$$

stets durch reelle Werthe von u, v auflösbar sey.

Um die Function $F(u, v)$ auf dem bequemsten Wege darzustellen, sey $u + v\sqrt{-1} = z(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)$, wobei $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist; ferner seyen die Coefficienten

$$A_0 = R_0(\cos.\alpha_0 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_0),$$
$$A_1 = R_1(\cos.\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_1),$$
$$A_2 = R_2(\cos.\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_2) \text{ ic.},$$
$$A_m = R_m(\cos.\alpha_m + \sqrt{-1}\sin.\alpha_m),$$

so erhalten wir mit Zuziehung des Moivre'schen Satzes:

$$\begin{aligned} f(u + v\sqrt{-1}) = {} & R_0 z^m[\cos.(\alpha_0 + m\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_0 + m\omega)] \\ & + R_1 z^{m-1}[\cos.(\alpha_1 + (m-1)\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_1 + (m-1)\omega)] \\ & + R_2 z^{m-2}[\cos.(\alpha_2 + (m-2)\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_2 + (m-2)\omega)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + R_{m-1} z[\cos.(\alpha_{m-1} + \omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_{m-1} + \omega)] \\ & + R_m(\cos.\alpha_m + \sqrt{-1}\sin.\alpha_m), \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = {} & R_0 z^m \cos.(\alpha_0 + m\omega) + R_1 z^{m-1}\cos.[\alpha_1 + (m-1)\omega] \\ & + R_2 z^{m-2}\cos.[\alpha_2 + (m-2)\omega] + \ldots. \\ & \ldots. + R_{m-1} z \cos.(\alpha_{m-1} + \omega) + R_m \cos.\alpha_m \\ \psi(u, v) = {} & R_0 z^m \sin.(\alpha_0 + m\omega) + R_1 z^{m-1}\sin.[\alpha_1 + (m-1)\omega] \\ & + R_2 z^{m-2}\sin.[\alpha_2 + (m-2)\omega] + \ldots. \\ & \ldots. + R_{m-1} z \sin.(\alpha_{m-1} + \omega) + R_m \sin.\alpha_m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(u, v) = {} & R_0^2 z^{2m} + 2R_0R_1 z^{2m-1}\cos.(\alpha_0 - \alpha_1 + \omega) \\ & + [R_1^2 + 2R_0R_2\cos.(\alpha_0 - \alpha_2 + 2\omega)]z^{2m-2} + \text{ic.} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhellet, daß die Function $F(z, \omega)$ nur dann endliche Werthe annimmt, wenn die Größe z, d. h. wenn die Größen u, v endliche Werthe erhalten, denn diese Function wächst immer unendlich, sobald u, v, also auch z, unendlich groß werden. Aus dem Ursprunge der Function $F(u, v)$ ist überdieß klar, daß sie für reelle Werthe von u, v nie negativ ausfällt; es wird daher unter allen Werthen, deren $F(u, v)$ fähig ist, einer, z. B. der den Substitutionen $u = u_0$, $v = v_0$ zugehörige Werth $F(u_0, v_0)$ der kleinste seyn. Wir werden nun zeigen, daß derselbe nothwendig $= 0$ ist.

Berechnen wir zu diesem Zwecke den Werth von $F(u_0+\lambda, v_0+\mu)$, wobei λ, μ beliebige reelle Größen bedeuten, wozu wir von der ursprünglichen Function $f(x)$ selbst ausgehen wollen. Setzen wir in derselben $x=u_0+v_0\sqrt{-1}+\xi$, und ordnen wir das mittelst des binomischen Lehrsatzes entwickelte Resultat nach den steigenden Potenzen von ξ, so erhalten wir

$$f(u_0+v_0\sqrt{-1}+\xi)=B_0+B_1\xi+B_2\xi^2+\ldots+B_{m-1}\xi^{m-1}+B_m\xi^m$$

wobei die aus den Bestandtheilen von A_0, A_1, $A_2 \ldots A_m$ und aus u_0, v_0 gebildeten Größen B_0, B_1, $B_2 \ldots B_{m-1}$, B_m sich auf die Formen

$$S_0(\cos.\beta_0+\sqrt{-1}\sin.\beta_0),\quad S_1(\cos.\beta_1+\sqrt{-1}\sin.\beta_1),$$
$$S_2(\cos.\beta_2+\sqrt{-1}\sin.\beta_2) \text{ ic.}$$

bringen lassen. Nehmen wir hier $\xi=\lambda+\mu\sqrt{-1}$ an, so wird, wenn wir dieser Größe die Form $\rho(\cos.\theta+\sqrt{-1}\sin.\theta)$ geben:

$$f[u_0+\lambda+(v_0+\mu)\sqrt{-1}]=$$
$$=S_0(\cos.\beta_0+\sqrt{-1}\sin.\beta_0)+S_1\rho[\cos.(\beta_1+\theta)+\sqrt{-1}\sin(\beta_1+\theta)]$$
$$+S_2\rho^2[\cos.(\beta_2+2\theta)+\sqrt{-1}\sin.(\beta_2+2\theta)]+\ldots.$$
$$\ldots.+S_m\rho^m[\cos.(\beta_m+m\theta)+\sqrt{-1}\sin.(\beta_m+m\theta)],$$

folglich ist im Sinne der oben gewählten Bezeichnung:

$$\varphi(u_0+\lambda, v_0+\mu)=S_0\cos.\beta_0+S_1\rho\cos.(\beta_1+\theta)+S_2\rho^2\cos.(\beta_2+2\theta)+\ldots.$$
$$\ldots.+S_m\rho^m\cos.(\beta_m+m\theta)$$
$$\psi(u_0+\lambda, v_0+\mu)=S_0\sin.\beta_0+S_1\rho\sin.(\beta_1+\theta)+S_2\rho^2\sin.(\beta_2+2\theta)+\ldots.$$
$$\ldots.+S_m\rho^m\sin.(\beta_m+m\theta),$$

und demnach, wegen $F(u, v)=[\varphi(u, v)]^2+[\psi(u, v)]^2$, wenn man die Functionen φ und ψ bei dem Quadriren als Binome behandelt:

$$F(u_0+\lambda, v_0+\mu)=$$
$$=S_0^2+2S_0S_1\rho\cos.(\beta_0-\beta_1-\theta)+2S_0S_2\rho^2\cos.(\beta_0-\beta_2-2\theta)+$$
$$\ldots..+2S_0S_m\rho^m\cos.(\beta_0-\beta_m-m\theta)$$
$$+[S_1\rho\cos.(\beta_1+\theta)+\ldots.+S_m\rho^m\cos.(\beta_m+m\theta)]^2$$
$$+[S_1\rho\sin.(\beta_1+\theta)+\ldots.+S_m\rho^m\sin.(\beta_m+m\theta)]^2.$$

Setzt man $\lambda=0$, $\mu=0$, so wird auch $\rho=0$, weil $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ ist, und die obige Gleichung gibt

$$F(u_0, v_0)=S_0^2.$$

Die Größen B_1, B_2, B_3 . . . B_m können nicht sämmtlich $=0$ seyn, weil sonst $f(u_0+v_0\sqrt{-1}+\xi)$ für jeden Werth von ξ sich auf die beständige Größe B_0 reducirte, also $f(x)$ selbst für jedes x denselben Werth erhielte, was ungereimt ist. Es sind daher auch nicht alle Größen S_1, S_2, S_3 . . . S_m der Nulle gleich. Nennen wir S_n die erste nicht verschwindende derselben, so haben wir

$$F(u_0+\lambda,\ v_0+\mu)=F(u_0,\ v_0)+2S_0\,S_n\,\rho^n\,cos.(\beta_0-\beta_n-n\theta)+\text{rc.}$$
$$+\ [S_n.\rho^n\,cos.(\beta_n+n\theta)+\text{rc.}]^2$$
$$+\ [S_n\,\rho_n\,sin.(\beta_n+n\theta)+\text{rc.}]^2.$$

Lassen wir hier ρ unendlich abnehmen, wodurch auch λ und μ unendlich klein werden, so erhält die Summe aller im zweiten Theile dieser Gleichung auf $F(u_0,\ v_0)$ folgenden Glieder das Zeichen des Gliedes $2\,S_0\,S_n\,\rho^n\,cos.(\beta_0-\beta_n-n\,\theta)$, weil in diesem die Größe ρ in der niedrigsten Potenz erscheint. Aber der unbestimmte Bogen θ kann, der unendlichen Abnahme von ρ unbeschadet, stets so gewählt werden, daß $S_0\,S_n\,cos.(\beta_0-\beta_n-n\theta)$ negativ ausfällt, daher wird bei dem unendlichen Abnehmen von λ und μ zuletzt

$$F(u_0+\lambda,\ v_0+\mu) < F(u_0,\ v_0).$$

Diese Folgerung widerspricht der Voraussetzung, daß $F(u_0,\ v_0)$ der kleinste Werth ist, welchen $F(u,\ v)$ anzunehmen vermag, so lange der Ausdruck $F(u_0+\lambda,\ v_0+\mu)$ Glieder enthält, in welchen die Cosinusse bloß in der ersten Dimension stehen. Es fallen also diese Glieder aus dem genannten Ausdrucke von selbst weg, und da dieß durch das Verschwinden aller Größen S_1, S_2, S_3 . . . S_m nicht möglich ist, so muß $S_0=0$ seyn, woraus sogleich $F(u_0,\ v_0)=0$ folgt.

Es gibt also reelle Werthe für u und v, nämlich $u=u_0$, $v=v_0$, für welche $F(u,\ v)$, folglich auch $f(u+v\sqrt{-1})$ verschwindet; d. h. der Gleichung $f(x)=0$ wird durch $x=u_0+v_0\sqrt{-1}$ Genüge geleistet.

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Über die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung mit einer unbekannten Größe.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung bewiesen, daß jeder Gleichung

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

in welcher die Coefficienten $A_0, A_1, A_2 \ldots A_m$ die Form $p + q\sqrt{-1}$ haben, wobei p, q reelle Größen bedeuten, wenigstens eine an dieselbe Form gebundene Wurzel entspricht.

Es sey w diese Wurzel, so ist das Polynom $f(x)$ durch $x - w$ ohne Rest theilbar.

Denn dividirte man dieses Polynom durch $x - w$ nach den aus der Arithmetik bekannten Regeln, so käme man endlich auf einen die Größe x nicht mehr enthaltenden Rest R. Es sey $f_1(x)$ der zugehörige Quotient, welcher nothwendig ein Polynom vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, so besteht die Gleichung

$$f(x) = (x - w) f_1(x) + R.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, denn $(x-w) f_1(x) + R$ ist eine bloße Transformation der Function $f(x)$; folglich gilt sie auch, wenn man $x = w$ setzt. Aber dann verschwindet das Product $(x-w) f_1(x)$, daher hat man

$$f(w) = R;$$

und da w eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ seyn soll, also $f(w) = 0$ ist:

$$R = 0,$$

was zu beweisen war.

Die so eben angestellte Betrachtung gibt uns die Beschaffenheit des Restes R selbst in dem Falle zu erkennen, wenn w keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist. Da nämlich R von x nicht abhängt, es also hinreicht R bloß für einen Werth von x zu kennen, und die Substitution $x = w$ auf die Gleichung $f(w) = R$ führt, so ist R jedesmal der Werth, welchen das durch $x - w$ zu dividirende Polynom $f(x)$ annimmt, wenn man in demselben $x = w$ setzt.

Dieß zeigt sich auch, wenn man die Division des Polynoms

$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$

durch das Binom $x - w$ wirklich verrichtet, wobei man noch insbesondere das Bildungsgesetz des Quotienten kennen lernt.

Es wird nicht unzweckmäßig seyn, die Rechnung bei dieser Gelegenheit mit dem allgemeineren Divisor

$$\varphi(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x - a_n$$

durchzuführen, in welchem die auf das erste Glied folgenden Coefficienten das Zeichen — bloß deßwegen erhalten haben, um den Gliedern des Quotienten eine gefälligere Form zu ertheilen.

Theilt man das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors, so erhält man den ersten Partialquotienten $\frac{A_0}{a_0} x^{m-n}$. Setzt man denselben $= Q_0 x^{m-n}$, und multiplicirt man damit den Divisor, um das Product sodann vom Dividend zu subtrahiren, so ergibt sich der

1ste Rest =

$$= (Q_0 a_1 + A_1) x^{m-1} + (Q_0 a_2 + A_2) x^{m-2} + (Q_0 a_3 + A_3) x^{m-3} + \ldots \text{ic.}$$

Dieser bietet uns, abermal durch das Anfangsglied des Divisors getheilt, den zweiten Partialquotienten $\frac{(Q_0 a_1 + A_1)}{a_0} x^{m-n-1}$ dar, welcher, wenn man $\frac{Q_0 a_1 + A_1}{a_0} = Q_1$ setzt, den

2ten Rest $= (Q_1 a_1 + Q_0 a_2 + A_2) x^{m-2} + (Q_1 a_2 + Q_0 a_3 + A_3) x^{m-3} + \text{ic.}$

erzeugt.

Läßt man wieder $\frac{Q_1 a_1 + Q_0 a_2 + A_2}{a_0} = Q_2$ seyn, so wird der dritte Partialquotient $= Q_2 x^{m-n-2}$, und der

3te Rest $= (Q_2 a_1 + Q_1 a_2 + Q_0 a_3 + A_3) x^{m-3} + \ldots\ldots$

Das Gesetz, nach welchem diese Operation fortschreitet, ist nun leicht wahrzunehmen. Denkt man sich den Quotienten bis zu dem Gliede entwickelt, welches x^{m-n-r} als Factor enthält, und bezeichnet man den zugehörigen Rest durch R_r, unter welcher Voraussetzung also

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = Q_0 x^{m-n} + Q_1 x^{m-n-1} + Q_2 x^{m-n-2} + Q_3 x^{m-n-3} + \ldots + Q_r x^{m-n-r} + \frac{R_r}{\varphi(x)}$$

ist, so hat man zur Berechnung von Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 .... Q_r und R_r folgende Formeln:

$$Q_0 = \frac{A_0}{a_0},$$

$$Q_1 = \frac{Q_0 a_1 + A_1}{a_0},$$

$$Q_2 = \frac{Q_1 a_1 + Q_0 a_2 + A_2}{a_0},$$

$$Q_3 = \frac{Q_2 a_1 + Q_1 a_2 + Q_0 a_3 + A_3}{a_0},$$

. . . .

$$Q_r = \frac{Q_{r-1} a_1 + Q_{r-2} a_2 + Q_{r-3} a_3 + \ldots + Q_0 a_r + A_r}{a_0},$$

$$\begin{aligned} R_r = & (Q_r a_1 + Q_{r-1} a_2 + Q_{r-2} a_3 + \ldots + Q_0 a_{r+1} + A_{r+1}) x^{m-r-1} \\ & + (Q_r a_2 + Q_{r-1} a_3 + Q_{r-2} a_4 + \ldots + Q_0 a_{r+2} + A_{r+2}) x^{m-r-2} \\ & + (Q_r a_3 + Q_{r-1} a_4 + Q_{r-2} a_5 + \ldots + Q_0 a_{r+3} + A_{r+3}) x^{m-r-3} \\ & + \text{2c.}, \end{aligned}$$

wobei man die Glieder des Restes R_r so lange fortsetzen muß, als der Dividend und der Divisor noch Bestandtheile dazu liefern.

Da hier jedes Glied Q_r des Quotienten aus den vorhergehenden Gliedern desselben Q_{r-1}, Q_{r-2}, Q_{r-3} ..... berechnet wird, so sagt man, diese Glieder bilden eine **recurrirende Reihe**. Die zu dieser Berechnung, den obigen Formeln gemäß, nöthigen Multiplicatoren

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \ldots \frac{a_r}{a_0}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_0}, \frac{a_n}{a_0}$$

werden gewöhnlich die **Relationsscale** der recurrirenden Reihe genannt. Läßt sich $f(x)$ durch $\varphi(x)$ nicht genau dividiren, so kann der Quotient nach Belieben fortgesetzt werden, und enthält zuletzt Glieder, in welchen Potenzen von x mit negativen steigenden Exponenten erscheinen. Geht man über das Glied, welches mit x^{-n} verbunden ist, hinaus, so reicht die Relationsscale zur Berechnung der folgenden Glieder des Quotienten allein hin, ohne den Dividend weiter berücksichtigen zu dürfen.

Die obigen Formeln setzen uns auch in den Stand, den Dividend und den Divisor eines vorgelegten Quotienten anzugeben, wenn so viele der Anfangsglieder des letztern, als der Dividend Glieder hat, sammt der Relationsscale bekannt sind.

Um nun zu dem Gegenstande unserer Vorlesung zurückzukehren,

sey $a_0 = 1$, $a_1 = w$, $a_2 = a_3 = $ ꝛc. $= a_n = 0$, $n = 1$, also $\varphi(x) = x - w$, so ergibt sich
$Q_0 = A_0$, $Q_1 = A_0 w + A_1$, $Q_2 = A_0 w^2 + A_1 w + A_2$, $Q_3 = A_0 w^3 + A_1 w^2 + A_2 w + A_3$ u. s. w.; und wenn man die Division so lange fortsetzt, bis im Quotienten ein von x freies Glied erscheint, welchem das Zeichen $Q_{m-1} x^{m-m} = Q_{m-1}$ entspricht, wobei
$Q_{m-1} = A_0 w^{m-1} + A_1 w^{m-2} + A_2 w^{m-3} + \ldots + A_{m-2} w + A_{m-1}$
ist: der zugehörige Rest
$R_{m-1} = A_0 w^m + A_1 w^{m-1} + A_2 w^{m-2} + \ldots + A_{m-1} w + A_m$,
d. h. $R_{m-1} = f(w)$, wie wir bereits oben gesagt haben.

Ist also w eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so haben wir

$$\frac{f(x)}{x - w} = f_1(x)$$

$$= A_0 x^{m-1} + (A_0 w + A_1) x^{m-2} + (A_0 w^2 + A_1 w + A_2) x^{m-3} + (A_0 w^3 + A_1 w^2 + A_2 w + A_3) x^{m-4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_0 w^{m-1} + A_1 w^{m-2} + A_2 w^{m-3} + \ldots + A_{m-2} w + A_{m-1}.$$

Sind die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots . A_m$ der Gleichung $f(x) = 0$ nebst der Wurzel w_1 unter der oben erwähnten Form $p + q\sqrt{-1}$ enthalten, so haben auch, wie man leicht sieht, die Coefficienten des Quotienten $\frac{f(x)}{x - w_1} = f_1(x)$ dieselbe Form. Es entspricht daher der Gleichung $f_1(x) = 0$ ebenfalls wenigstens eine Wurzel w_2 von derselben Form. Man wird nun wieder $f_1(x)$ durch $x - w_2$ ohne Rest theilen und auf den Quotienten $\frac{f_1(x)}{x - w_2} = f_2(x)$, welcher ein Polynom vom $(m-2)^{ten}$ Grade ist, denselben Schluß anwenden können. Fährt man auf diesem Wege fort, so erhält man

$$\frac{f_2(x)}{x - w_3} = f_3(x), \quad \frac{f_3(x)}{x - w_4} = f_4(x) \text{ u. s. w.},$$

wobei w_3, w_4 u. s. w. die nothwendig vorhandenen Wurzeln der Gleichungen $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ u. s. w. anzeigen. Da jede folgende dieser Gleichungen um einen Grad niedriger ist, als die vorhergehende, so kommt man zuletzt auf eine Gleichung vom ersten Grade, nämlich $f_{m-1}(x) = 0$. Diese hat offenbar die Form $A_0 x - K = 0$, und gibt $x = \frac{K}{A_0}$. Setzen wir $\frac{K}{A_0} = w_m$, so wird $f_{m-1}(x) = A_0(x - w_m)$.

Nun ist den obigen Schlüssen gemäß:

$$f(x) = (x - w_1) f_1(x),$$
$$f_1(x) = (x - w_2) f_2(x),$$
$$f_2(x) = (x - w_3) f_3(x),$$
$$f_3(x) = (x - w_4) f_4(x),$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$f_{m-2}(x) = (x - w_{m-1}) f_{m-1}(x);$$

folglich haben wir

$$f(x) = A_0(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)(x-w_4)\dots(x-w_{m-1})(x-w_m).$$

Diese Gleichung ist, wie aus ihrem Ursprunge erhellet, eine identische, da das Product $A_0 (x - w_1)(x - w_2) \dots (x - w_m)$ nach verrichteter Multiplication aller einzelnen Factoren in $f(x)$ übergehen muß; sie besteht demnach für jeden Werth von x. Setzt man in derselben abwechselnd

$$x = w_2, \quad x = w_3, \quad x = w_4, \quad \dots \quad x = w_{m-1}, \quad x = w_m,$$

so findet man

$$f(w_2) = 0, \; f(w_3) = 0, \; f(w_4) = 0, \; \dots f(w_{m-1}) = 0, \; f(w_m) = 0,$$

es hat also die Gleichung $f(x) = 0$ außer der bereits oben vorausgesetzten Wurzel w_1 stets noch $m - 1$ andere: w_2, w_3, w_4, ... w_{m-1}, w_m, woraus hervorgeht, daß im Allgemeinen jeder an die oben angegebene Form gebundenen Gleichung vom m^{ten} Grade, m Wurzeln gehören, und daß der erste Theil derselben das Product des Coefficienten der höchsten Potenz der unbekannten Größe mit m Factoren ist, welche man erhält, wenn man jede dieser Wurzeln von dem Zeichen der unbekannten Größe subtrahirt.

Eine Gleichung mit einer unbekannten Größe vom m^{ten} Grade läßt aber auch nicht mehr als m Wurzeln zu. Denn es sey $f(x) = 0$ diese Gleichung, und w_1, w_2, w_3 ... w_m seyen die m Wurzeln, welche ihr im Allgemeinen nothwendig zukommen, so ist

$$f(x) = A_0 (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \dots (x - w_m),$$

wobei A_0 den Coefficienten der höchsten Potenz von x im Polynome $f(x)$ anzeigt. Wäre nun noch eine von w_1, w_2, w_3 ... w_m verschiedene Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ möglich, so müßte, wenn v diese Wurzel vorstellt, $f(x)$ durch $x - v$ ohne Rest getheilt werden können, und es wäre, wenn man

$$\frac{f(x)}{x - v} = \varphi(x)$$

setzt, auch
$$f(x) = (x - v)\,\varphi(x);$$

folglich bestände die identische Gleichung

$$(x-v)\,\psi(x) = A_0(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)\,\ldots\,(x-w_m),$$

welche, wenn man $x=v$ seyn läßt,

$$o = A_0(v-w_1)(v-w_2)(v-w_3)\,\ldots\,(v-w_m)$$

gäbe: eine ungereimte Folgerung, da ein Product, in welchem der Factor Null nicht vorkommt, nie verschwindet.

Eine Gleichung vom m^{ten} Grade, $f(x)=o$, kann in besonderen Fällen weniger als m Wurzeln zulassen, wenn nämlich einige der oben erwähnten Größen w_1, w_2, w_3 .... w_m einander gleich sind. Um jedoch die Analogie mit der allgemeinen Beschaffenheit der Gleichungen beizubehalten, sagt man, der Gleichung $f(x)=o$ entsprechen in diesen besonderen Fällen wiederholte oder gleiche Wurzeln, was auch mit der Bildung des Polynoms $f(x)$ aus seinen einfachen Factoren gut übereinstimmt.

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Über die Wurzeln der Gleichungen, deren Coefficienten sämmtlich reelle Größen sind.

Erscheinen in einer geordneten Gleichung mit einer unbekannten Größe x

(1) $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots . A_{m-1} x + A_m = 0$

bloß reelle Coefficienten, so kann man von der Anwesenheit einer imaginären Wurzel $p + q\sqrt{-1}$, in welcher p, q reelle Größen sind, jederzeit auf das Vorhandenseyn einer zweiten imaginären Wurzel $p - q\sqrt{-1}$ schließen, welche sich von der ersten bloß durch das Zeichen des imaginären Factors $\sqrt{-1}$ unterscheidet. Denn setzt man in der obigen Gleichung

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

oder, wenn man $R = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\cos.\theta = \frac{p}{R}$, $\sin.\theta = \frac{q}{R}$ seyn läßt, $x = R(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$, so findet man

$$(2)\quad A_0 R^m \cos.m\theta + A_1 R^{m-1}\cos(m-1)\theta + A_2 R^{m-2}\cos.(m-2)\theta + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1} R\cos.\theta + A_m$$
$$+\sqrt{-1}\,[A_0 R^m \sin.m\theta + A_1 R^{m-1}\sin.(m-1)\theta + A_2 R^{m-2}\sin.(m-2)\theta + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1} R\sin.\theta] = 0.$$

Da die Polynome $A_0 R^m \cos.m\theta + A_1 R^{m-1}\cos.(m-1)\theta +$ ꝛc. und $A_0 R^m \sin.m\theta + A_1 R^{m-1}\sin.(m-1)\theta +$ ꝛc. reelle Größen sind, so kann diese Gleichung nur in so fern bestehen, als jedes dieser Polynome für sich allein verschwindet; denn eine reelle Größe kann von einer imaginären Größe nicht aufgehoben werden.

Aber durch die Substitution $x = p - q\sqrt{-1}$ oder

$$x = R(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta)$$

geht der erste Theil der Gleichung (1) in

$$A_0 R^m \cos.m\theta + A_1 R^{m-1}\cos.(m-1)\theta + A_2 R^{m-2}\cos.(m-2)\theta + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1} R\cos.\theta + A_m$$
$$-\sqrt{-1}\,[A_0 R^m \sin.m\theta + A_1 R^{m-1}\sin.(m-1)\theta + A_2 R^{m-2}\sin.(m-2)\theta + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1} R\sin.\theta]$$

über, folglich verschwindet derselbe ebenfalls, d. h. es ist auch $p - q\sqrt{-1}$ eine Wurzel dieser Gleichung.

Gehören demnach einer Gleichung mit einer unbekannten Größe, deren Coefficienten sämmtlich reell sind, imaginäre Wurzeln, so sind dieselben nothwendig in gerader Anzahl vorhanden. Hieraus folgt, daß jede solche Gleichung von einer ungeraden Ordnung wenigstens eine reelle Wurzel besitzt, und daß die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung von ungerader Ordnung immer ungerade, und bei einer Gleichung von gerader Ordnung immer gerade ist.

Man erhält das letzte von x freie Glied A_m einer Gleichung

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

wenn man in dem ersten Theile derselben $x = 0$ setzt.

Es ist aber, wenn $w_1, w_2, w_3, \ldots w_m$ die Wurzeln dieser Gleichung sind, auch

$$f(x) = A_0 (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_m),$$

folglich hat man, wenn man auch hier $x = 0$ seyn läßt:

$$A_m = A_0 \times - w_1 \times - w_2 \times - w_3 \times \ldots \times - w_m =$$
$$= (-1)^m A_0 w_1 w_2 w_3 \ldots w_m,$$

d. h. das letzte Glied jeder geordneten Gleichung ist das Product aus dem Coefficienten des ersten Gliedes und den mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln.

Man kann immer annehmen, das höchste Glied der Gleichung $f(x) = 0$ sey mit einem positiven Coefficienten versehen. Denn findet das Gegentheil Statt, so reicht eine bloße Änderung der Zeichen aller Glieder hin, diese Form herbeizuführen. Kommen nun in der Gleichung $f(x) = 0$ bloß reelle Coefficienten vor, so wird das Zeichen ihres Endgliedes, da je zwei zusammengehörige der allenfalls vorhandenen imaginären Wurzeln, wie $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$ ein positives Product $p^2 + q^2$ geben, bloß durch die Anzahl der reellen positiven Wurzeln bestimmt; dieses Zeichen ist nämlich + oder —, je nachdem die genannte Anzahl gerade oder ungerade ist.

Auf diese Bemerkungen gestützt, gelangt man sogleich zu der Folgerung, daß einer Gleichung von ungerader Ordnung bei der oben vorausgesetzten Form nothwendig eine reelle Wurzel gehört, deren Zeichen jenem des von der unbekannten Größe freien Gliedes entgegengesetzt ist; daß eine Gleichung von gerader Ordnung mit einem negativen Endgliede nothwendig zwei reelle Wurzeln besitzt, eine positive und eine negative; und daß der gänzliche Mangel reeller Wurzeln nur in

dem Falle Statt finden kann, wenn die Gleichung von gerader Ordnung, und ihr letztes Glied positiv ist.

Sind $p+q\sqrt{-1}$, $p-q\sqrt{-1}$ zwei zusammengehörige imaginäre Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist $f(x)$ durch das Product

$$[x-(p+q\sqrt{-1})][x-(p-q\sqrt{-1})]=(x-p)^2+q^2$$
$$=x^2-2px+p^2+q^2$$

ohne Rest theilbar. Da nun dieses Product eine reelle Form hat, so kann man auch den Satz aussprechen, daß jede reelle ganze und rationale Function einer veränderlichen Größe stets in reelle Factoren des ersten oder doch des zweiten Grades auflösbar ist.

In einem vollständigen geordneten Polynome von der Form

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

mit reellen Coefficienten, bilden gleiche Zeichen je zweier Nachbarglieder eine sogenannte Zeichenfolge, ungleiche Zeichen aber eine Zeichenabwechslung; Zeichenpaare, das ist Folgen und Abwechslungen zusammengenommen, sind um eines weniger vorhanden als Glieder oder Zeichen; folglich eben so viele, als der höchste Exponent m Einheiten enthält.

Wird das Polynom $f(x)$ mit einem Binome $x-w$, dessen Glieder durch $-$ verbunden sind, und in welchem w, an sich betrachtet, eine positive reelle Größe vorstellt, multiplicirt, so enthält das Product $(x-w)f(x)$ nach gehöriger Reduction seiner Glieder nicht mehr Zeichenfolgen, als der Factor $f(x)$.

Man findet nämlich den Coefficienten jedes, an einer bestimmten Stelle befindlichen Gliedes im Producte $(x-w)f(x)$, wenn man im Factor $f(x)$ von dem Coefficienten des an derselben Stelle stehenden Gliedes den Coefficienten des unmittelbar vorangehenden Gliedes mit Rücksicht auf die Zeichen beider, also im algebraischen Sinne, subtrahirt. Haben nun beide Coefficienten in $f(x)$ verschiedene Zeichen, so ist das Zeichen ihrer Differenz völlig bestimmt, es ist nämlich das Zeichen des Minuends. Besitzen aber die genannten Coefficienten einerlei Zeichen, so ist das Zeichen ihrer Differenz, so lange man ihnen keine speciellen numerischen Werthe unterlegt, unbestimmt. Hieraus erhellet, daß jede Zeichenabwechslung des Factors $f(x)$ im Producte $(x-w)f(x)$ ein bestimmtes, jede Zeichenfolge ein unbestimmtes Zeichen bedingt, und daß im Producte unmittelbar aufeinander folgende bestimmte Zeichen stets Zeichenabwechslungen darstellen; also die da-

selbst etwa möglichen Zeichenfolgen bloß aus der Bestimmung der bis jetzt noch unbestimmten Zeichen erwachsen. Allein jedes isolirte unbestimmte Zeichen, so wie jede Reihe unmittelbar auf einander folgender unbestimmter Zeichen des genannten Productes erscheint immer zwischen ungleichen bestimmten Zeichen, weil das erste dieser Grenzzeichen mit jenem Zeichen einerlei ist, welches im Factor $f(x)$ die Reihe ununterbrochener Zeichenfolgen eröffnet, aus welcher die erwähnte Reihe unbestimmter Zeichen des Productes entspringt, und das andere Grenzzeichen dem Zeichen im Factor $f(x)$ gleich kommt, durch welches die Reihe eben dieser Zeichenfolgen unterbrochen wird. Es ist daher unmöglich, die unbestimmten Zeichen im Producte so zu wählen, daß sie mit den an dieselben unmittelbar sich anschließenden bestimmten Zeichen eine ununterbrochene Reihe von Zeichenfolgen bilden, sondern darunter muß jedesmal wenigstens eine Zeichenabwechslung erscheinen. Nun gibt jede Reihe zusammenhängender unbestimmter Zeichen mit den beiden bestimmten Grenzzeichen um ein Zeichenpaar mehr, als unbestimmte Zeichen vorhanden sind; folglich sind im Producte höchstens eben so viele Zeichenfolgen möglich, als dasselbe unbestimmte Zeichen oder der Factor $f(x)$ Zeichenfolgen enthält, wodurch der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Das Product $(x-w)f(x)$ enthält um ein Zeichenpaar mehr, als der Factor $f(x)$, daher kann man den obigen Satz auch dadurch ausdrücken, daß man sagt, dieses Product müsse wenigstens um eine Zeichenabwechslung mehr besitzen, als der Factor $f(x)$.

Wir haben hier den Factor $f(x)$ wie auch das Product $(x-w)f(x)$ als vollständige Polynome betrachtet. Sind dieselben unvollständig, so kann man die fehlenden Glieder, jedes mit dem Coefficienten 0 versehen, einschalten. Diese Nullen können sowohl das Zeichen + als auch das Zeichen — erhalten. Der obige Satz gilt offenbar, wie man auch immer die Zeichen der Nullen in $f(x)$ annimmt, wenn man nur die Zeichen der im Producte $(x-w)f(x)$ vorkommenden Nullen, in so fern die früheren darauf Einfluß haben, dieser Annahme getreu bestimmt. Wählt man also die Zeichen der Nullen in den Polynomen $f(x)$ und $(x-w)f(x)$ dergestalt, daß die Anzahl der Zeichenfolgen in beiden die größtmöglichste wird, welche man leicht erhält, wenn man das Zeichen jeder Nulle mit jenem des vorangehenden Coefficienten übereinstimmen läßt, so kann man in jedem Falle versichert seyn, daß die genannte Anzahl der Zeichenfolgen in $(x-w)f(x)$ diese Anzahl

in $f(x)$ nicht übersteigt, oder was dasselbe ist, daß die kleinstmögliche Anzahl der Zeichenabwechslungen in $(x-w)f(x)$ wenigstens um eine Einheit größer ausfällt, als in $f(x)$.

Wir sind nun im Stande zu zeigen, daß die Anzahl der reellen positiven Wurzeln einer mit reellen Coefficienten versehenen geordneten Gleichung $f(x)=0$ die kleinstmöglichste Anzahl der im Polynome $f(x)$ vorkommenden Zeichenabwechslungen nicht übertreffen kann.

Denn sind w_1, w_2, w_3 ... w_n sämmtliche reelle positive Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist das Polynom $f(x)$ durch das Product $(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)\ldots(x-w_n)$ ohne Rest theilbar, folglich entsteht $f(x)$, wenn man den Quotienten dieser Division nach und nach mit $x-w_1$, $x-w_2$, $x-w_3$, ... $x-w_n$ multiplicirt. Bei jedem einzelnen Schritte wächst der kleinstmöglichsten Anzahl der bereits vorhandenen Zeichenabwechslungen eine Einheit zu, folglich kann die erwähnte Anzahl der Zeichenabwechslungen im letzten Producte $f(x)$ die Anzahl der Factoren $x-w_1$, $x-w_2$, $x-w_3$..., $x-w_n$, das ist die Anzahl der reellen positiven Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ nicht überschreiten.

Ist $-w$ eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, so ist $+w$ eine Wurzel der Gleichung $f(-x)=0$. Ändert man also in einer Gleichung von der oben angenommenen Form das Zeichen der unbekannten Größe, wodurch, wenn man das erste Glied stets positiv macht, die Zeichen aller an den geraden Stellen befindlichen Glieder geändert werden, und daher auch alle Zeichenabwechslungen in Zeichenfolgen, und alle Zeichenfolgen in Zeichenabwechslungen übergehen: so hat man eine Gleichung, welcher eben so viele reelle positive Wurzeln entsprechen, als die vorige reelle negative Wurzeln zuläßt. Wendet man den so eben bewiesenen Satz auf die neue Gleichung an, und geht man dann wieder auf die vorige zurück, so ergibt sich die Folgerung, daß die Anzahl der reellen negativen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ die kleinstmöglichste Anzahl der in ihr erscheinenden Zeichenfolgen nicht zu übertreffen vermag.

Eine Gleichung, welche keine imaginären Wurzeln zuläßt, besitzt daher eben so viele positive Wurzeln als Zeichenabwechslungen, und eben so viele negative Wurzeln als Zeichenfolgen. Auch können in derselben, wie man mit Zuziehung der obigen Sätze leicht sieht, nicht zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder fehlen, und wo ein Glied fehlt, müssen die Nachbarglieder verschiedene Zeichen besitzen.

Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Über die Berechnung rationaler symmetrischer Functionen der unbekannten Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

Eine Function mehrerer unbestimmter Größen wird eine symmetrische genannt, wenn sie bei jeder beliebigen gegenseitigen Verwechslung dieser Größen genau die vorige bleibt. So sind z. B.

$$x^2 y^3 + x^3 y^2 + x^2 z^3 + x^3 z^2 + y^2 z^3 + y^3 z^2$$

und $$x^5 + y^5 + z^5 - \frac{2x^3 y^3}{z} - \frac{2x^3 z^3}{y} - \frac{2y^3 z^3}{x}$$

symmetrische Functionen der Größen x, y, z.

Betrachten wir nun eine geordnete Gleichung mit einer unbekannten Größe x, nämlich

$$(1) \quad f(x) = \\ = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Ihre m Wurzeln seyen $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$, so ist

$$(2) \quad f(x) = A_0 (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_m).$$

Dieses Product ändert sich nicht, wie man auch immer $w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots w_m$ unter einander vertauschen mag, weil einerseits A_0 von den Wurzeln der Gleichung gar nicht abhängt, was aus dem Umstande erhellet, daß man der höchsten Potenz der unbekannten Größe in einer Gleichung von der Form $f(x) = 0$, durch Multiplication oder Division sämmtlicher Glieder mit einer und derselben Zahl, jeden beliebigen Coefficienten ertheilen kann, und andererseits durch die erwähnte Vertauschung bloß die Ordnung der Factoren $x - w_1$, $x - w_2$, $x - w_3 \ldots x - w_m$ verändert wird: es ist also das Polynom

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m$$

nothwendig eine symmetrische Function der Größen $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$. Allein wegen der Verschiedenheit der Potenzen der unbekannten Größe x können die einzelnen Glieder desselben nicht wechselweise in einander übergehen; folglich sind die Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ selbst symmetrische Functionen von $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$.

In der That findet man durch wirkliche Entwickelung des Productes (2) und Vergleichung seiner Glieder mit (1):

$$A_1 = - A_0 (w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_m),$$
$$A_2 = + A_0 (w_1 w_2 + w_1 w_3 + \ldots + w_2 w_3 + \ldots + w_{m-1} w_m),$$
$$A_3 = - A_0 (w_1 w_2 w_3 + \ldots\ldots + w_{m-2} w_{m-1} w_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{m-1} = (-1)^{m-1} A_0 (w_1 w_2 w_3 \ldots w_{m-1} + \ldots + w_2 w_3 \ldots w_{m-1} w_m),$$
$$A_m = (-1)^m A_0 w_1 w_2 w_3 \ldots w_{m-1} w_m;$$

d. h. es ist $-\frac{A_1}{A_0}$ die Summe aller Wurzeln, $+\frac{A_2}{A_0}$ die Summe der Amben, $-\frac{A_3}{A_0}$ die Summe der Ternen u. s. w. . . . ., endlich $\frac{(-1)^m A_m}{A_0}$ das Product der Wurzeln der obigen Gleichung $f(x) = 0$.

Eine merkwürdige Eigenschaft der Gleichungen mit einer unbekannten Größe besteht darin, daß sich der Betrag jeder rationalen symmetrischen Function ihrer Wurzeln, ohne diese letzteren zu kennen, bloß durch ihre Coefficienten angeben läßt.

Da jede gebrochene rationale symmetrische Function offenbar auf einen oder mehrere Brüche zusammengezogen werden kann, deren Zähler und Nenner, für sich allein betrachtet, ganze rationale symmetrische Functionen darstellen, so werden wir zur Rechtfertigung obiger Behauptung bloß von Functionen der letztgenannten Gattung sprechen.

Hebt man aus irgend einer solchen symmetrischen Function der Wurzeln $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$ ein Glied, z. B.

$$k w_1^a w_2^b w_3^c w_4^d \ldots w_{n-1}^g w_n^h$$

heraus, wobei k einen von $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$ unabhängigen Coefficienten, und $a, b, c, d, \ldots. g, h$ ganze positive Zahlen anzeigen, so kommen in dieser Function, ihrer Natur nach, alle Ausdrücke als Glieder vor, welche sich aus dem angeführten Gliede durch Vertauschung der darin erscheinenden Größen $w_1, w_2, w_3, w_4 \ldots w_{n-1}, w_n$ sowohl unter sich, als auch mit den übrigen Größen $w_{n+1}, w_{n+2}, w_{n+3} \ldots w_m$ ableiten lassen. Alle diese mit dem gemeinschaftlichen Factor k versehenen Glieder bilden zusammengenommen eine symmetrische Function, welche aus nicht mehr Theilen besteht, als gerade zur Symmetrie erforderlich sind, und deßwegen eine einfache symmetrische Function heißen soll. Wir wollen sie durch das Symbol $k[a, b, c, d \ldots g, h]$ vorstellen, in welchem bloß die jedem Gliede eigenthümliche Exponenten-Gruppe, worauf es hier allein ankommt, ersichtlich gemacht wird.

Es ist also die gesammte zu berechnende symmetrische Function aus symmetrischen Theilen von der Form

$$k[a, b, c, d \ldots g, h]$$

zusammengesetzt. Ordnen wir die Exponenten jedes solchen Theiles nach ihrer Größe in absteigender Folge, so daß a nicht kleiner ist als b, b nicht kleiner als c, c nicht kleiner als d u. s. w.; ordnen wir ferner die einzelnen Theile so, daß in keinem derselben ein niedrigerer Exponent eine frühere Stelle einnimmt, als in dem vorhergehenden Theile, und nehmen wir an, $k[a, b, c, d \ldots g, h]$ sey der erste dieser Theile, und die Anzahl der in ihm erscheinenden Exponenten $a, b, c, \ldots h$ sey $= n$. Das Product

$$k\left(-\frac{A_1}{A_0}\right)^{a-b}\left(+\frac{A_2}{A_0}\right)^{b-c}\left(-\frac{A_3}{A_0}\right)^{c-d}\times\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\times\left(\frac{(-1)^{n-1}A_{n-1}}{A_0}\right)^{g-h}\left(\frac{(-1)^n A_n}{A_0}\right)^h$$

ist, wie aus der oben ausgesprochenen Bedeutung der Größen $-\frac{A_1}{A_0}, +\frac{A_2}{A_0}, -\frac{A_3}{A_0} \ldots\ldots$ erhellet, eine ganze rationale symmetrische Function von $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$, welche gehörig entwickelt und nach dem so eben erwähnten Gesetze geordnet, gleichfalls

$$k[a, b, c, d \ldots g, h]$$

zum ersten Theile bekommt. Nennen wir daher F die zu berechnende symmetrische Function, und P das angeführte Product, so ist die Differenz

$$F - P,$$

welche wir durch F_1 bezeichnen wollen, eine symmetrische Function von $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$, in der das an die erste Stelle gehörende Glied, mit $k[a, b, c, d \ldots g, h]$ verglichen, an einer früheren Stelle einen niedrigeren Exponenten führt. Auf dieselbe Art kann zu F_1 ein Product P_1 gefunden werden, so daß der erste Theil der Differenz

$$F_1 - P_1 = F_2,$$

mit jenem der nächstvorhergehenden Differenz verglichen, wieder an einer früheren Stelle einen niedrigeren Exponenten enthält, u. s. w. Setzt man diese Operation nach derselben Regel fort, so erniedriget man fortwährend die Exponenten des ersten einfachen symmetrischen Theiles der noch rückständigen symmetrischen Function, und kommt zu-

letzt gewiß auf eine völlig verschwindende Differenz, nämlich auf

$$F_r - P_r = o.$$

Man hat nun $F = P + F_1$, $F_1 = P_1 + F_2$ u. s. w. $F_r = P_r$, also

$$F = P + P_1 + \ldots + P_r,$$

wodurch die vorgelegte symmetrische Function F auf Producte von Potenzen der Größen $-\frac{A_1}{A_0}, +\frac{A_2}{A_0}, -\frac{A_3}{A_0} \ldots \frac{(-1)^n A_n}{A_0}$, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, zurückgeführt worden ist. Auch sieht man aus dem Gange der so eben vorgetragenen Entwickelung, daß der höchste Werth des Zeigers n, welcher sich auf die letzte in den Producten $P, P_1 \ldots P_r$ vorkommende unter den Größen $-\frac{A_1}{A_0}, +\frac{A_2}{A_0}, -\frac{A_3}{A_0}$ rc. bezieht, dem höchsten Werthe der Summe

$$a + b + c + d + \ldots + g + h$$

gleich ist.

Man wird jedoch die hier angedeutete Rechnung bedeutend abkürzen, wenn man die Berechnung complicirterer symmetrischer Functionen der Wurzeln einer Gleichung auf jene der einfacheren gründet. Eine der einfachsten symmetrischen Functionen dieser Art ist die Summe gleichnamiger mit ganzen positiven oder negativen Exponenten versehener Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, deren Werth auf folgende Art berechnet werden kann.

Multiplicirt man die gegebene Gleichung

$$(1)\quad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = o$$

mit x^r, so hat man:

$$(3)\quad A_0 x^{m+r} + A_1 x^{m+r-1} + A_2 x^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} x^{r+1} + A_m x^r = o.$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet, wenn man statt x eine der Wurzeln $w_1, w_2, w_3 \ldots w_m$ der vorgelegten Gleichung (1) setzt, folglich ist

$$A_0 w_1^{m+r} + A_1 w_1^{m+r-1} + A_2 w_1^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} w_1^{r+1} + A_m w_1^r = o,$$
$$A_0 w_2^{m+r} + A_1 w_2^{m+r-1} + A_2 w_2^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} w_2^{r+1} + A_m w_2^r = o,$$
$$A_0 w_3^{m+r} + A_1 w_3^{m+r-1} + A_2 w_3^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} w_3^{r+1} + A_m w_3^r = o,$$

. . . .

$$A_0 w_m^{m+r} + A_1 w_m^{m+r-1} + A_2 w_m^{m+r-2} + \ldots + A_{m-1} w_m^{r+1} + A_m w_m^r = o.$$

Addirt man alle diese Gleichungen, und bezeichnet man der frü-

heren Übereinkunft getreu, die Summe

$$w_1^r + w_2^r + w_3^r + \ldots + w_m^r \text{ durch } [r],$$

so hat man

$$(4)\quad A_0[m+r] + A_1[m+r-1] + A_2[m+r-2] + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1}[r+1] + A_m[r] = 0.$$

Diese Gleichung gibt $[m+r]$, wenn $[m+r-1]$, $[m+r-2]$, $[m+r-3]$ rc. bereits bekannt sind. Läßt man $r=0$ seyn, und bedenkt man, daß

$$[0] = w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + \ldots + w_m^0 = 1+1+1+\ldots+1 = m$$

ist, so folgt

$$(5)\quad A_0[m]+A_1[m-1]+A_2[m-2]+\ldots+A_{m-1}[1]+mA_m=0.$$

Wie aus dem oben Gesagten zu ersehen ist, hängt die dem Zeichen $[n]$ entsprechende einfache symmetrische Function, wenn n eine ganze positive, m nicht übertreffende Zahl bedeutet, bloß von den Größen $-\frac{A_1}{A_0}$, $+\frac{A_2}{A_0}$, $-\frac{A_3}{A_0}$ bis $\frac{(-1)^n A_n}{A_0}$ ab. Stimmen daher in zwei Gleichungen die $n+1$ ersten Coefficienten der Potenzen der unbekannten Größe überein, so haben für beide die Functionen $[1]$, $[2]$, $[3]$ . . . . . $[n]$ einerlei Werthe. Nun ist für die Gleichung

$$(6)\quad A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

der Formel (5) gemäß

$$(7)\quad A_0[n]+A_1[n-1]+A_2[n-2]+\ldots+A_{n-1}[1]+nA_n=0;$$

folglich ist diese letztere Formel auch auf die Gleichung (1) anwendbar. Setzen wir hier $n=1, 2, 3 \ldots$ rc., so haben wir

$$(8)\quad \begin{aligned} &A_0[1] + A_1 = 0 \\ &A_0[2] + A_1[1] + 2A_2 = 0 \\ &A_0[3] + A_1[2] + A_2[1] + 3A_3 = 0 \\ &\qquad\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Lassen wir in der Gleichung (4) r eine negative ganze Zahl, und numerisch betrachtet kleiner als m seyn, so haben wir, wenn wir der Deutlichkeit wegen $-r$ statt r schreiben, wobei r an sich genommen positiv ist:

$$(9)\quad A_0[m-r] + A_1[m-r-1] + A_2[m-r-2] + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1}[-(r-1)] + A_m[-r] = 0.$$

Zwischen $A_0[m-r]$ und $A_m[-r]$ erscheint in dieser Gleichung das Glied $A_{m-r}[o] = m A_{m-r}$; ferner ist der Formel (7) zufolge
$A_0[m-r]+A_1[m-r-1]+A_2[m-r-2]+\ldots+(m-r)A_{m-r}=o$;
daher bleibt, wenn man diese Gleichung von (9) abzieht:

$$(10)\quad A_m[-r] + A_{m-1}[-(r-1)] + A_{m-2}[-(r-2)] + \ldots \ldots + r A_{m-r} = o.$$

Besondere Fälle dieser letzteren Gleichung sind

$$(11)\quad \begin{aligned} &A_m[-1] + A_{m-1} = o \\ &A_m[-2] + A_{m-1}[-1] + 2A_{m-2} = o \\ &A_m[-3] + A_{m-1}[-2] + A_{m-2}[-1] + 3A_{m-3} = o \end{aligned}$$

u. s. w.

Daß die Formel (9) sich auch auf jene Fälle erstreckt, in welchen r größer ist als m, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Ist man im Stande jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung von der Form [r] zu berechnen, so hat die Berechnung der symmetrischen Functionen von den Formen [a, b], [a, b, c], [a, b, c, d] u. s. w. keine Schwierigkeit.

Denn es ist offenbar

$$\begin{aligned}[a]\cdot[b] &= (w_1^a+w_2^a+w_3^a+\ldots)(w_1^b+w_2^b+w_3^b+\ldots) \\ &= w_1^{a+b}+w_2^{a+b}+w_3^{a+b}+\ldots \\ &+ w_1^a w_2^b + w_2^a w_1^b + w_1^a w_3^b + w_3^a w_1^b + w_2^a w_3^b + w_3^a w_2^b + \ldots\ldots \\ &= [a+b] + [a, b],\end{aligned}$$

folglich

$$(12)\qquad [a, b] = [a][b] - [a+b].$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}&[a, b][c] = \\ &= (w_1^a w_2^b + w_2^a w_1^b + w_1^a w_3^b + \ldots)(w_1^c + w_2^c + w_3^c + \ldots) \\ &= w_1^{a+c} w_2^b + w_2^{a+c} w_1^b + w_1^{a+c} w_3^b + w_3^{a+c} w_1^b + w_2^{a+c} w_3^b + w_3^{a+c} w_2^b + \ldots\ldots \\ &+ w_1^a w_2^{b+c} + w_2^a w_1^{b+c} + w_1^a w_3^{b+c} + w_3^a w_1^{b+c} + w_2^a w_3^{b+c} + w_3^a w_2^{b+c} + \ldots\ldots \\ &+ w_1^a w_2^b w_3^c + w_2^a w_1^b w_3^c + w_1^a w_3^b w_2^c + w_3^a w_1^b w_2^c + w_2^a w_3^b w_1^c + w_3^a w_2^b w_1^c + \ldots \\ &= [a+c, b] + [a, b+c] + [a, b, c];\end{aligned}$$

folglich

$$(13)\quad [a, b, c] = [a, b][c] - [a+c, b] - [a, b+c].$$

Auf dieselbe Art findet man

(14) $[a, b, c, d] = [a, b, c][d] + [a+d, b, c] - [a, b+d, c] - [a, b, c+d]$

u. s. w.

Die in jeder späteren Formel vorkommenden symmetrischen Functionen ergeben sich aus den früheren Formeln. Bei dem Gebrauche dieser Formeln ist nicht außer Acht zu lassen, daß alle Exponenten der in denselben befindlichen symmetrischen Functionen als ungleiche Zahlen betrachtet worden sind. Will man dieselben auf symmetrische Functionen anwenden, in welchen mehrere gleiche Exponenten erscheinen, so bedenke man, daß in der Function $[a, b, c, \ldots h]$, wenn r Exponenten einander gleich werden, jedes Glied so oft wiederholt wird, als sich r Größen versetzen lassen, nämlich $1.2.3\ldots(r-1)r$ mal, und daß deßhalb diese Function den Factor $1.2.3\ldots(r-1)r$ erhält.

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Über die Transformation der Gleichungen.

Eine gegebene Gleichung mit einer unbekannten Größe **transformiren**, heißt aus derselben eine andere Gleichung ableiten, deren Wurzeln zu sämmtlichen Wurzeln der ersteren in einer vorgeschriebenen Relation stehen.

Ist

(1) $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$

die zu **transformirende**;

(2) $F(y) = U_0 y^n + U_1 y^{n-1} + U_2 y^{n-2} + \ldots + U_{n-1} y + U_n = 0$

die **transformirte** Gleichung, und bezeichnet man irgend eine Wurzel der ersteren durch x_1, irgend eine andere Wurzel derselben durch x_2, eben so eine von den genannten Wurzeln verschiedene durch x_3 u. s. w.: so wird die Relation, welche zwischen den Wurzeln beider Gleichungen (1) und (2) Statt finden soll, festgesetzt, wenn man sagt, es müsse

(3) $$y = \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots)$$

seyn, wobei φ eine Function von bekannter Form anzeigt, und das Problem der Transformation der Gleichung (1) in (2) besteht darin, aus den bekannten Werthen von

$m, A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_m$ jene von

$n, U_0, U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots\ldots\ldots U_n$ zu berechnen.

Hiebei wird übrigens, so wie A_0 willkürlich ist, auch U_0 unbestimmt seyn, und es vielmehr auf die Quotienten

$$\frac{U_1}{U_0}, \frac{U_2}{U_0}, \frac{U_3}{U_0} \ldots\ldots$$

ankommen. Deßhalb nehmen wir auch im Folgenden der Kürze wegen an, beide Gleichungen (1), (2) seyen auf eine solche Form gebracht, daß $A_0 = 1$ und $U_0 = 1$ ist.

Wir können hier immer voraussetzen, daß in der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots)$ alle m Wurzeln der Gleichung (1) erscheinen. Denn ist dieß nicht der Fall, so denken wir uns die Summe oder auch das Product 2c. der fehlenden Wurzeln, mit dem Coefficienten o verbunden, dieser Function zugesetzt.

Die Wurzeln der Gleichung (2) ergeben sich, wenn man in der, falls sie vieldeutig ist, in jedem möglichen Sinne genommenen, Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ die Zeichen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ nach und nach alle Wurzeln der Gleichung (1) bedeuten läßt, oder was dasselbe ist, wenn man, in so fern man $x_1, x_2, x_3 \ldots$ stets auf die nämlichen Wurzeln der Gleichung (1) bezieht, diese Größen auf alle möglichen Arten unter einander verwechselt. Da aber die Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ so beschaffen seyn kann, daß sie bei gewissen Verwechslungen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ genau dieselbe bleibt (welche Beschaffenheit wir in ihrer Form liegend und nicht bloß bei einzelnen speciellen Werthen der genannten Größen, von welchen wir hier ganz abstrahiren, Statt findend denken), so werden wir, um der Gleichung (2) nicht mehr Wurzeln zu geben, als eben nöthig sind, hiezu bloß die verschiedenen Ausdrücke in Anspruch nehmen, welche die Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ mit Rücksicht auf ihre allenfalls vorhandene Vieldeutigkeit bei den oben erwähnten Verwechslungen darbietet. Bezeichnen wir diese verschiedenen Ausdrücke durch

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n,$$

so ist das Product

$$(y - \varphi_1)(y - \varphi_2)(y - \varphi_3) \ldots (y - \varphi_n)$$

offenbar eine symmetrische Function der Größen x_1, x_2, x_3, rc.; denn jede denkbare Verwechslung derselben hat nichts weiter zur Folge, als daß die Ausdrücke $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ wechselweise in einander übergehen. Es sind daher auch die Coefficienten der Potenzen von y in dem durch Entwickelung dieses Productes sich ergebenden Polynome

$$F(y) = y^n + U_1 y^{n-1} + U_2 y^{n-2} + \ldots + U_{n-1} y + U_n,$$

nämlich U_1, U_2, rc. U_n symmetrische Functionen von $x_1, x_2, x_3 \ldots$, und zwar rationale Functionen, weil das erwähnte Product bei jeder Bedeutung der vielförmigen Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ dasselbe ist, also keine Vieldeutigkeit zuläßt: folglich lassen sich die Werthe von $U_1, U_2, \ldots U_n$ aus den Coefficienten der Gleichung

$$(1) \quad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

mit Hülfe der in der vorhergehenden Vorlesung erklärten Methoden berechnen. Aber die Gleichung

$$F(y) = 0$$

ist eben die zu suchende, daher ist auch das vorgelegte Problem aufgelöst.

Wenn man den Werth der Function

$$(3) \qquad y = \varphi(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$$

unter der Voraussetzung, daß $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ unbekannt sind, durch Verbindung der Gleichung (3) mit den m Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m) \\ A_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots x_{m-1} x_m \\ (4) \qquad A_3 &= -(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{m-2} x_{m-1} x_m) \\ &\text{u. s. w.} \\ A_m &= (-1)^m x_1 x_2 x_3 \dots x_m \end{aligned}$$

berechnen wollte, indem man auf was immer für eine Art aus diesen eine neue Gleichung ableitet, in welcher bloß $A_1, A_2, A_3 \dots A_m$ und y enthalten sind, so findet man, wenn man dieser letzteren Gleichung den niedrigst möglichsten Grad und in Bezug auf $A_1, A_2, A_3 \dots A_m$ rationale Coefficienten zu ertheilen sucht, kein anderes Resultat, als die obige Gleichung

$$F(y) = 0.$$

Denn das System der Rechnungsoperationen, welche von den Gleichungen (3) und (4) auf $F(y) = 0$ führen, ist von der besonderen Bedeutung der Größen $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ unabhängig; da nun $A_1, A_2, A_3 \dots A_m$ durch keine gegenseitige Vertauschung von $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ geändert werden, so wird das Endresultat immer dasselbe seyn, welche Stellung man auch den Größen x_1, x_2, x_3, rc. in der Gleichung (3) geben mag *).

Der Grad n der transformirten Gleichung

$$(2) \qquad F(y) = 0$$

wird factisch bestimmt, wenn man alle aus der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$ durch die Vielförmigkeit derselben und durch die gegenseitige Vertauschung der Größen $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ entspringenden verschiedenen Ausdrücke $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ bildet, eine nach combinatorischen Principien auszuführende Operation, welcher, ihre Weitläufigkeit ausgenommen, keine Schwierigkeit im Wege steht.

*) Insbesondere erhellet aus dieser Betrachtung, daß man, wenn man aus den Gleichungen (4) eine der Wurzeln, z. B. x_1 suchen wollte, durch Beseitigung der übrigen auf die Gleichung $f(x_1) = 0$ kommen muß, welche keine andere ist als (1), der außer x_1 noch die Wurzeln $x_2, x_3 \dots x_m$ gehören.

Die Ordnungszahl n ist jedoch an gewisse Gesetze gebunden, mit deren Hülfe man im Stande seyn wird, ihre Beschaffenheit einiger Maßen zu beurtheilen.

Es sey v die Anzahl der verschiedenen Werthe, welche der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ bei jeder einzelnen Stellung der Größen x_1, x_2, x_3, ꝛc. bloß wegen ihrer Vieldeutigkeit zukommen (wobei wir von speciellen Bestimmungen dieser Größen abstrahiren, durch welche vieldeutige Bestandtheile der Function gänzlich vernichtet werden könnten), so ist, wenn jeder der erwähnten Werthe von $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ bei dem Verwechseln der Größen x_1, x_2, x_3, ꝛc. p verschiedene Ausdrücke darbietet, offenbar $n = vp$. Gibt aber nicht jeder der durch die Vieldeutigkeit herbeigeführten Werthe der genannten Function bei dem Permutiren von x_1, x_2, x_3, ꝛc. gleich viel verschiedene Ausdrücke, so ist dieß ein Zeichen, daß durch das Permutiren Werthe wiederholt werden, welche bereits in der Vieldeutigkeit der Function liegen, und man hat für p die geringste Anzahl der aus den Werthen der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ durch das Verwechseln von x_1, x_2, x_3 ꝛc. entspringenden verschiedenen Ausdrücke zu nehmen.

Enthält die Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ in ihrer einfachsten Form (d. i. nach vollbrachter Reduction aller gleichartigen Theile) mehrere vieldeutige Theile, wovon dem einen v_1, dem zweiten v_2, dem dritten v_3 Werthe u. s. w. entsprechen, so ist, weil jeder dieser Werthe mit jedem der übrigen zusammengestellt werden kann, $v = v_1 v_2 v_3 \ldots$

Die Anzahl p der verschiedenen Ausdrücke, welche aus der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ durch das bloße gegenseitige Vertauschen der m Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ entstehen (wobei also vorausgesetzt wird, daß sämmtlichen vieldeutigen Bestandtheilen derselben ein bestimmter Sinn beigelegt worden sey), ist offenbar höchstens der Anzahl der Versetzungen gleich, welche die genannten Größen zulassen, also höchstens $= 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (m-1) m$.

Denken wir uns alle $1 . 2 . 3 \ldots m$ Ausdrücke, welche aus der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$ für sämmtliche Versetzungen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ hervorgehen, wirklich dargestellt, und nehmen wir an, es kommen darunter r einander gleiche vor, deren jeder $= \varphi_1$ sey. Da die Gleichheit derselben in der Form der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ gegründet und von jeder speciellen Bestimmung der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ unabhängig ist, so erhält man, wenn man diese Größen in einem anderen der erwähnten $1 . 2 . 3 \ldots m$

Ausdrücke, z. B. in φ_2, so unter einander verwechselt, wie dieß in den letzteren r gleichen Ausdrücken geschah, offenbar abermal r gleiche Ausdrücke, deren jeder $= \varphi_2$ ist. Fährt man auf diese Weise fort, so zerfällt das System aller $1.2.3 \ldots m$ vorhandenen Ausdrücke in Partien, deren jede r gleiche Ausdrücke umfaßt, und es muß, wenn p die Anzahl dieser Partien bedeutet, $pr = 1.2.3 \ldots m$ seyn. Da nun aber p auch die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke anzeigt, welche $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ bei allen Vertauschungen der m Größen x_1, x_2, x_3, ꝛc. darbietet, so ist diese Anzahl stets ein Divisor des Productes $1.2.3 \ldots m$.

Allein nicht zu jedem Divisor des Productes $1.2.3 \ldots m$ läßt sich eine Function von m Größen finden, welche bei allen möglichen gegenseitigen Vertauschungen dieser Größen nur so viele verschiedene Werthe annimmt, als der genannte Divisor Einheiten enthält.

Cauchy hat in dem Journal de l'école polytechnique 17me Cahier bewiesen, daß eine Function von m Größen, welche bei allen denkbaren gegenseitigen Vertauschungen derselben weniger verschiedene Werthe darbietet, als die größte m nicht übersteigende Primzahl anzeigt, entweder symmetrisch ist, oder doch nur zwei verschiedene Werthe zuläßt.

Es kann gezeigt werden, daß die Function unter der erwähnten Voraussetzung sich nicht ändert, wenn man jede drei beliebige der m Größen unter einander vertauscht, woraus dann der zu beweisende Satz sogleich folgt. Zu diesem Ende bezeichne man die drei Größen, welche man in das Auge fassen will, durch x_1, x_2, x_3; die übrigen durch x_4, x_5 ꝛc. und die Function selbst durch $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots)$. Ferner sey p eine Primzahl, welche nicht größer ist als m, aber größer als die Anzahl der verschiedenen Werthe, die aus $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots)$ durch das Permutiren von x_1, x_2, x_3, x_4 ꝛc. entspringen. Man vertausche die p Größen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots x_{p-1}, x_p$ so unter einander, daß jede folgende derselben an die Stelle der vorhergehenden, und die erste an die Stelle der letzten rückt. Es sey der anfängliche Werth der vorgelegten Function $= \varphi$, und der nach dieser Vertauschung Statt findende $= \varphi_2$. Durch dieselbe Vertauschung läßt sich aus φ_2 ein neuer Werth φ_3, und aus diesem φ_4 ableiten, u. s. w. Man hat hier

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots x_{p-1}, x_p),\\
\varphi_2 &= \varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ldots x_p, x_1),\\
\varphi_3 &= \varphi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ldots x_1, x_2),\\
\varphi_4 &= \varphi(x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ldots x_2, x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{p-1} &= \varphi(x_{p-1}, x_p, x_1, x_2, x_3 \ldots x_{p-3}, x_{p-2}),\\
\varphi_p &= \varphi(x_p, x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_{p-2}, x_{p-1}),\\
\varphi_{p+1} &= \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots x_{p-1}, x_p)
\end{aligned}$$

u. s. w.,

also $\varphi_{p+1} = \varphi_1$, woraus $\varphi_{p+2} = \varphi_2$, $\varphi_{p+3} = \varphi_3$ u. s. w., und allgemein, wenn q, r positive ganze Zahlen bedeuten, $\varphi_{pq+r} = \varphi_r$ folgt.

Da die Function, von der hier die Rede ist, weniger als p verschiedene Werthe haben soll, so müssen unter den p Werthen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \ldots \varphi_{p-1}, \varphi_p$$

wenigstens zwei identische vorkommen. Sie seyen φ_a und φ_b. Setzt man, unter der Annahme $b > a$, der Kürze wegen $b - a = c$, so entsteht offenbar φ_{1+c} aus φ_1 nach demselben Gesetze, nach welchem φ_b aus φ_a gebildet wird, und da die Gleichung $\varphi_a = \varphi_b$ sich auf die Form der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots$ ꝛc.) gründet, so ist nothwendig $\varphi_1 = \varphi_{1+c}$, also überhaupt

$$\varphi_1 = \varphi_{1+c} = \varphi_{1+2c} = \varphi_{1+3c} = \text{ꝛc.}$$

Da $c < p$ und p eine Primzahl ist, so kann keine der $p - 1$ Zahlen $c, 2c, 3c, 4c \ldots (p-2)c, (p-1)c$ durch p ohne Rest getheilt werden; auch sind die Reste derselben von einander verschieden, weil sonst die Differenz zweier dieser Zahlen, welche selbst in die Reihe derselben gehört, durch p theilbar wäre: daher gibt es unter den genannten Zahlen gewiß eine, welche durch p getheilt die Einheit zum Reste läßt. Nennen wir diese Zahl hc, so haben wir, da dieselbe unter der Form $pq + 1$ vorgestellt werden kann, $\varphi_{1+hc} = \varphi_{pq+2} = \varphi_2$, also wegen $\varphi_1 = \varphi_{1+hc}$ auch $\varphi_1 = \varphi_2$.

Vertauschen wir in $\varphi_2 = \varphi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ldots x_p, x_1)$ die daselbst vorkommenden Größen x_2, x_3, x_4 ꝛc. so unter einander, daß die zweite derselben in die Stelle der ersten, die letzte in die Stelle der zweiten, die erste in die Stelle der dritten tritt, und von den übrigen jede vorangehende die Stelle der nachfolgenden erhält, wodurch φ_2 in $\Phi = \varphi(x_3, x_1, x_2, x_4, x_5 \ldots x_{p-1}, x_p)$ übergeht; so kann auf dieselbe Art wie oben die Gleichung $\varphi_2 = \Phi$ erwiesen werden. Es

ist also auch $\varphi_1 = \Phi$. Vergleicht man φ_1 mit Φ, so sieht man, daß hier bloß die Größen x_1, x_2, x_3 unter einander ihre Stellen gewechselt haben. Leitet man aus Φ einen neuen Werth der vorgelegten Function nach demselben Gesetze ab, nach welchem Φ aus φ_1 entspringt, so hat man

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, \text{rc.}) = \varphi(x_3, x_1, x_2, x_4, \text{rc.})$$
$$= \varphi(x_2, x_3, x_1, x_4, \text{rc.}).$$

Es wird also diese Function nicht geändert, wenn man drei beliebige der in ihr erscheinenden m Größen, wie x_1, x_2, x_3 unter einander verwechselt. Allein jede Vertauschung dreier Größen ist aus zwei auf einander folgenden Vertauschungen zweier Größen zusammengesetzt; erleidet also der Werth der Function durch Vertauschung zweier Größen eine Änderung, so stellt eine darauf folgende Vertauschung zweier Größen den vorigen Werth wieder her, so daß die Function bei jeder beliebigen Permutation ihrer Größen, welche im Grunde eine bloße Succession von Verwechslungen zweier Größen ist, höchstens zwei verschiedene Werthe annimmt.

Sieben und zwanzigste Vorlesung.

Über einige specielle Transformationen der Gleichungen.

Obschon man mit der in der vorhergehenden Vorlesung zur Transformation der Gleichungen vorgetragenen Methode in jedem gegebenen Falle ausreicht, so kann doch die Rechnung mit Hülfe besonderer Kunstgriffe bedeutend abgekürzt werden. Folgende Beispiele, welche die sich am häufigsten darbietenden Transformationen der Gleichungen darstellen, werden hierüber näheren Aufschluß geben.

I. Es sey die Gleichung

$$(1)\quad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

gegeben; man soll aus derselben eine andere ableiten, deren Wurzeln sämmtlich um die gegebene Zahl a kleiner sind, als die Wurzeln der ersteren.

Bezeichnet man die unbekannte Größe der zu suchenden Gleichung durch y, so ist $y = x - a$, folglich $x = y + a$. Wird dieser Werth von x in die gegebene Gleichung substituirt, und jede Potenz desselben mittelst des binomischen Lehrsatzes nach den fallenden Potenzen von y entwickelt, so erhält man die transformirte Gleichung

$$(2)\quad U_0 y^m + U_1 y^{m-1} + U_2 y^{m-2} + U_3 y^{m-3} + \ldots + U_{m-1} y + U_m = 0,$$

wobei $\quad U_0 = A_0,\quad U_1 = m A_0 a + A_1,$

$$U_2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} A_0 a^2 + (m-1) A_1 a + A_2,$$

$$U_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} A_0 a^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2} A_1 a^2 + (m-2) A_2 a + A_3$$

u. s. w., und endlich

$$U_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + A_3 a^{m-3} + \ldots + A_{m-1} a + A_m \text{ ist.}$$

Sollen die Wurzeln der neuen Gleichung um a größer seyn, als die Wurzeln der gegebenen, so darf man nur in diesen Formeln a mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen.

Das Bildungsgesetz der Coefficienten der transformirten Gleichung wird ersichtlicher, wenn man in obiger Rechnung die Entwicke-

lung der Potenzen von $y+a$ nach den steigenden Potenzen von y vornimmt. Gibt man der transformirten Gleichung die Form

$$(3)\ V_0+\frac{V_1}{1}y+\frac{V_2}{1.2}y^2+\frac{V_3}{1.2.3}y^3+\ldots+\frac{V_m}{1.2.3\ldots m}y^m=0,$$

so zeigt sich

$$V_0=A_0a^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+A_3a^{m-3}+\ldots+A_{m-1}a+A_m,$$

$$V_1=mA_0a^{m-1}+(m-1)A_1a^{m-2}+(m-2)A_2a^{m-3}$$
$$+(m-3)A_3a^{m-4}+\ldots+A_{m-1},$$

$$V_2=m(m-1)A_0a^{m-2}+(m-1)(m-2)A_1a^{m-3}$$
$$+(m-2)(m-3)A_2a^{m-4}+\text{etc.},$$

$$V_3=m(m-1)(m-2)A_0a^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)A_1a^{m-4}$$
$$+(m-2)(m-3)(m-4)A_2a^{m-5}+\text{etc.}$$

u. s. w.,

$$V_{m-1}=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots4.3.2A_0a$$
$$+(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\ldots3.2.1A_1,$$

$$V_m=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots3.2.1A_0,$$

d. h. es ist $V_0=f(a)$; und von den übrigen Coefficienten V_1, V_2, V_3 .... entsteht jeder aus dem ihm nächst vorhergehenden, wenn man jedes Glied dieses letzteren mit dem darin erscheinenden Exponenten von a multiplicirt, und hernach diesen Exponenten um eine Einheit verringert.

Die so eben erklärte Transformation kann gebraucht werden, um aus einer gegebenen Gleichung eine andere abzuleiten, in welcher ein bestimmtes Glied fehlt. Soll z. B. in der Gleichung (2) das zweite Glied fehlen, so muß a so gewählt werden, daß der Coefficient U_1 verschwindet, man muß demnach $a=-\frac{A_1}{mA_0}$ setzen.

Wollte man aus der transformirten Gleichung (2) das dritte Glied wegschaffen, so müßte a der Gleichung

$$\frac{m(m-1)}{2}A_0a^2+(m-1)A_1a+A_2=0$$

Genüge leisten. Dieß kann im Allgemeinen auf zweifache Art geschehen, weil die angeführte quadratische Gleichung zwei Wurzeln zuläßt. Da aber diese Wurzeln nicht jederzeit reell sind, so verschafft die erwähnte Transformation in der Theorie der Gleichungen keinen wesentlichen Nutzen, und ist daher nicht im Gebrauche.

Die Tilgung des r^{ten} Gliedes der transformirten Gleichung hängt,

wie aus den obigen Formeln zu ersehen ist, von der Auflösung einer Gleichung des $(r-1)^{ten}$ Grades ab.

II. Man soll aus der Gleichung

(1) $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0$

eine andere finden, deren Wurzeln entstehen, wenn man jene der gegebenen Gleichung sämmtlich mit einem unveränderlichen Factor a multiplicirt.

Stellt man die unbekannte Größe der geforderten Gleichung durch y vor, so ist $y = ax$, folglich $x = \frac{y}{a}$. Wird dieser Ausdruck in die Gleichung (1) eingeführt, so erhält man

$$\frac{A_0 y^m}{a^m} + \frac{A_1 y^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{A_2 y^{m-2}}{a^{m-2}} + \frac{A_3 y^{m-3}}{a^{m-3}} + \ldots + A_m = 0,$$

und hieraus

$$(4) \quad A_0 y^m + A_1 a y^{m-1} + A_2 a^2 y^{m-2} + A_3 a^3 y^{m-3} + \ldots \ldots + A_m a^m = 0,$$

welche Gleichung die verlangte Eigenschaft besitzt. Sie entsteht aus der gegebenen (1), wenn man die Glieder derselben, der Reihe nach, mit den Gliedern der geometrischen Progression $1, a, a^2, a^3, \ldots . a^m$ multiplicirt, und x mit y vertauscht. Nur muß man hierbei für jedes etwa fehlende Glied der Gleichung (1) auch das correspondirende Glied der Progression weglassen.

Sind die Coefficienten der Potenzen der unbekannten Größe in der Gleichung (1) ganze Zahlen, und ist der erste derselben A_0 von der Einheit verschieden, so läßt sich die transformirte Gleichung (4) immer so einrichten, daß ihr erstes Glied die Einheit, und ihre folgenden Glieder ganze Zahlen zu Coefficienten erhalten. Nimmt man nämlich $a = A_0$, so werden alle Glieder der Gleichung (4) durch A_0 theilbar, und sie geht in

$$y^m + A_1 y^{m-1} + A_0 A_2 y^{m-2} + A_0^2 A_3 y^{m-3} + \ldots . . + A_0^{m-1} A_m = 0$$

über. Ist A_0 eine zusammengesetzte Zahl, k^r ein Factor derselben, und sind die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_{r-1}$ beziehungsweise durch $k^{r-1}, k^{r-2}, k^{r-3}, \ldots . k$ theilbar; so ist es hinreichend $a = \frac{A_0}{k^{r-1}}$ zu setzen.

Durch diese Transformation kann auch eine Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0,$$

deren höchstes Glied mit dem Coefficienten 1 erscheint, und in welcher die ganzen Zahlen A_1, A_2, A_3, ... A_m beziehungsweise die Factoren k, k^2, k^3, ... k^m enthalten, vereinfacht werden, wenn man $a = \frac{1}{k}$ seyn läßt.

III. Die Substitutionen $x = -y$, $x = \frac{1}{y}$, $x = \sqrt{y}$ u. d. gl. führen eben so auf transformirte Gleichungen, deren Wurzeln die negativen, die reciproken Werthe, die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung u. d. gl. sind. Wir überlassen die weitere Behandlung dieser Aufgaben dem Fleiße unserer Leser.

IV. Soll aus der Gleichung

$$(5)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0$$

eine andere abgeleitet werden, deren Wurzeln die Summen je zweier der Wurzeln der ersteren sind, so sey

$$(6)\quad y^n + U_1 y^{n-1} + U_2 y^{n-2} + U_3 y^{n-3} + \ldots + U_n = 0$$

die verlangte Gleichung.

Da sich die m Wurzeln der Gleichung (5) auf $\frac{m(m-1)}{2}$ verschiedene Arten zu zweien zusammenstellen lassen, so muß der Ordnungsexponent der Gleichung (6) nämlich $n = \frac{m(m-1)}{2}$ seyn.

Ferner ist, wenn r eine ganze positive Zahl anzeigt:

$$(x+\xi)^r = x^r + r\xi x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1\,.\,2}\xi^2 x^{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\xi^3 x^{r-3} + \ldots$$
$$\ldots + r\xi^{r-1}x + \xi^r.$$

Man setze hier statt ξ nach und nach jede der Wurzeln der Gleichung (5), welche wir x_1, x_2, x_3 ... x_m nennen wollen, und addire die sich hiedurch ergebenden Gleichungen, so hat man, wenn man im Allgemeinen die Summe der r^{ten} Potenzen der Größen x_1, x_2, x_3, ... x_m durch S_r vorstellt:

$$(x+x_1)^r + (x+x_2)^r + (x+x_3)^r + \ldots + (x+x_m)^r =$$
$$= x^r + rS_1 x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1\,.\,2} S_2 x^{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3} S_3 x^{r-3} + \ldots$$
$$\ldots + rS_{r-1}x + S_r.$$

Läßt man in dieser Gleichung die Größe x nach und nach jede

der Wurzeln x_1, x_2, x_3, ... x_m bedeuten, und addirt man alle einzelnen Resultate, so ergibt sich:

$$2^r S_r + 2 [(x_1+x_2)^r + (x_1+x_3)^r + \ldots + (x_2+x_3)^r + \ldots] =$$
$$= m S_r + r S_1 S_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1 . 2} S_2 S_{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 . 2 . 3} S_3 S_{r-3} + \ldots$$
$$\ldots + r S_{r-1} S_r + m S_r .$$

Im zweiten Theile dieser Gleichung sind die beiden äußersten Glieder und alle von diesen gleich weit abstehenden einander gleich; daher erhält man nach verrichteter Division der ganzen Gleichung durch 2:

$$(7)\quad (x_1+x_2)^r + (x_1+x_3)^r + \ldots + (x_2+x_3)^r + \ldots =$$
$$= (m - 2^{r-1}) S_r + r S_1 S_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1 . 2} S_2 S_{r-2}$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{1 . 2 . 3} S_3 S_{r-3} + \ldots .$$

Der Theil rechter Hand des Gleichheitszeichens endigt sich mit

$$\frac{1}{2} . \frac{r(r-1)(r-2) \ldots \left(\frac{r}{2}+1\right)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots \frac{r}{2}} (S_{\frac{r}{2}})^2,$$

wenn r eine gerade Zahl ist, und mit

$$\frac{r(r-1)(r-2) \ldots \left(\frac{r+3}{2}\right)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots \frac{r-1}{2}} S_{\frac{r-1}{2}} S_{\frac{r+1}{2}},$$

wenn r ungerade ist.

Der Theil linker Hand des Gleichheitszeichens ist die Summe der r^{ten} Potenzen der Wurzeln der transformirten Gleichung (6); es lassen sich daher die Summen der Potenzen der Wurzeln der Gleichung (6) aus jenen der Potenzen der Wurzeln der Gleichung (5) berechnen.

Bezeichnet man die Summe

$$(x_1+x_2)^r + (x_1+x_3)^r + \ldots + (x_2+x_3)^r + \ldots\ldots$$

der Kürze wegen durch Σ_r, so hat man, der Formel (7) zufolge, insbesondere:

$$(8)\quad \begin{aligned} \Sigma_1 &= (m-1) S_1 \\ \Sigma_2 &= (m-2) S_2 + S_1^2 \\ \Sigma_3 &= (m-4) S_3 + 3 S_1 S_2 \\ \Sigma_4 &= (m-8) S_4 + 4 S_1 S_3 + 3 S_2^2 \\ \Sigma_5 &= (m-16) S_5 + 5 S_1 S_4 + 10 S_2 S_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Summen S_1, S_2, S_3, S_4, ꝛc. sind mittelst der in der fünf und zwanzigsten Vorlesung gefundenen Formeln durch die Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4, ꝛc. der Gleichung (5) gegeben; hat man nun mit Hülfe der Formeln (8) die Größen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, ꝛc. berechnet, so erhält man, wie man leicht sieht, die in der Frage stehenden Coefficienten U_1, U_2, U_3, U_4, ꝛc. der Gleichung (6) ebenfalls mittelst der am angeführten Orte aufgestellten Formeln (8).

V. Auf dieselbe Art kann aus der Gleichung

$$(5)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0$$

eine andere abgeleitet werden, deren Wurzeln die Differenzen je zweier der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Da jede Wurzel der Gleichung (5) in jeder dieser Differenzen sowohl als Minuendus, wie auch als Subtrahendus erscheinen kann, so ist die Anzahl aller möglichen Differenzen doppelt so groß, als die Anzahl aller Amben der Wurzeln. Der Grad der transformirten Gleichung ist demnach $= m(m-1)$.

Die erwähnten Differenzen sind paarweise einander gleich und entgegengesetzt; bezeichnen wir daher durch x_1 und x_2 zwei Wurzeln der Gleichung (5), und durch y die Unbekannte der transformirten Gleichung, so ist der erste Theil derselben durch

$$[y - (x_1 - x_2)]\,[y - (x_2 - x_1)] = y^2 - (x_1 - x_2)^2$$

theilbar.

Ein Gleiches gilt von jeder anderen Combination der Wurzeln der Gleichung (5); daher ist der erste Theil der transformirten Gleichung ein Product von Factoren von der Form $y^2 - (x_1 - x_2)^2$, und deßhalb kommen in dieser letztern Gleichung keine Glieder vor, in welchen die unbekannte Größe y mit ungeraden Exponenten versehen ist.

Setzt man also $\frac{m(m-1)}{2} = n$ und $y^2 = z$, so kann man der transformirten Gleichung die Form

$$(9)\quad z^n + V_1 z^{n-1} + V_2 z^{n-2} + V_3 z^{n-3} + \ldots + V_{n-1} z + V_n = 0$$

geben, wobei es nur mehr auf die Bestimmung der Coefficienten V_1, V_2, V_3 . . . V_n ankömmt.

Die Wurzeln der Gleichung (9) sind die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung (5); unsere Aufgabe ist demnach gelöst, wenn wir zeigen, wie die Potenzen der Wurzeln der Gleichung (9) aus den Potenzen der Wurzeln der Gleichung (5) berechnet

werden; denn letztere Potenzen lassen sich aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung finden, und die ersteren verhelfen sogleich zu den Coefficienten der geforderten Gleichung.

Setzt man in der Gleichung

$$(x - \xi)^r =$$
$$= x^r - r\xi x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}\xi^2 x^{r-2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\xi^3 x^{r-3} + \ldots \text{etc.},$$

worin r eine ganze positive Zahl bedeutet, statt ξ nach und nach jede der Wurzeln der Gleichung (5), nämlich $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$; addirt man sodann alle einzelne Resultate, und läßt man x in der erhaltenen Summe nach und nach jede der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ bedeuten, so hat man, wenn man die Ergebnisse dieser Substitution abermal in eine Summe zusammenzieht:

$$(10)\quad (x_1-x_2)^r + (x_1-x_3)^r + \ldots + (x_2-x_1)^r + (x_2-x_3)^r + \ldots$$
$$\ldots + (x_3-x_1)^r + (x_3-x_2)^r + \ldots$$
$$= mS_r - rS_1 S_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} S_2 S_{r-2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} S_3 S_{r-3} + \text{etc.},$$

wobei im Allgemeinen S_r die Summe $x_1^r + x_2^r + x_3^r + \ldots + x_m^r$ vorstellt.

Ist r ungerade, so werden beide Theile der Gleichung (10) $=0$.

Ist aber r eine gerade Zahl, $=2p$, so wird, wenn Σ_p die Summe der p^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gleichung (9) anzeigt, der erste Theil in (10) $= 2\Sigma_p$; man erhält demnach, wenn man bedenkt, daß im zweiten Theile der Gleichung (10) das erste und das letzte Glied, wie auch die von denselben gleich weit entfernten Glieder übereinstimmen, und daselbst ein mittleres Glied vorhanden ist:

$$\Sigma_p = mS_{2p} - 2pS_1 S_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} S_2 S_{2p-2} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} \cdot (S_p)^2.$$

Die Differenzen der Wurzeln einer Gleichung werden nicht geändert, wenn man alle Wurzeln derselben um gleich viel wachsen oder abnehmen läßt; man kann daher aus der gegebenen Gleichung das zweite Glied wegschaffen, und die Rechnung in Bezug auf die transformirte Gleichung vornehmen, wodurch die Operation vereinfacht wird.

Acht und zwanzigste Vorlesung.

Über die Berechnung des Werthes einer beliebigen Function der Wurzeln einer Gleichung, wenn der Werth einer anderen Function dieser Wurzeln gegeben ist.

Es seyen y und z zwei beliebige Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ einer Gleichung

(1) $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$,

welche bei allen gegenseitigen Vertauschungen dieser Wurzeln, mit Rücksicht auf die in ihrer Form etwa liegende Vieldeutigkeit, die Formenwerthe

$$y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4 \ldots\ldots$$
$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; z_4 \ldots\ldots$$

darbieten mögen; so kann, wenn einer der Werthe von y, z. B. y_1 gegeben ist, jeder der Werthe von z, z. B. z_1 entweder unmittelbar berechnet, oder doch auf eine aufzulösende Gleichung zurückgeführt werden. Dieß zu zeigen ist der Gegenstand gegenwärtiger Vorlesung.

Nehmen wir erstlich an, die Functionen y und z seyen beide rational, damit keine Vieldeutigkeit derselben in Betrachtung komme; lassen wir ferner den gegebenen Werth y_1 und den zu suchenden z_1 in Bezug auf die Permutationen der ihnen zum Grunde liegenden Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ gleichartig, d. h. so beschaffen seyn, daß jeder dieser zwei Werthe durch dieselben Vertauschungen der genannten Wurzeln sich ändere, durch welche der andere geändert wird, und durch dieselben Vertauschungen keine Änderung erfahre, welche auf den andern keinen Einfluß ausüben. Erscheint nun die Function y bei allen Permutationen von $x_1, x_2, x_3 \ldots$ unter den n verschiedenen Formen

$$y_1, \; y_2, \; y_3, \ldots\ldots y_n,$$

so wird auch die Function z bloß n Formen

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \ldots\ldots z_n$$

zulassen. Die letzteren Formen seyen so geordnet, daß sie den ersteren gliedweise correspondiren, d. h. z_2 entstehe aus z_1 durch dasselbe Ver-

tauschungsgesetz, nach welchem y_2 aus y_1 entspringt; ein Gleiches gelte von y_3 und z_3 in Bezug auf y_1 und z_1, u. s. w.

Alles dieses vorausgesetzt, sind die n Functionen

$$(2)\quad \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n &= H_0 \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + \ldots + y_n z_n &= H_1 \\ y_1^2 z_1 + y_2^2 z_2 + y_3^2 z_3 + \ldots + y_n^2 z_n &= H_2 \\ y_1^3 z_1 + y_2^3 z_2 + y_3^3 z_3 + \ldots + y_n^3 z_n &= H_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{n-1} z_1 + y_2^{n-1} z_2 + y_3^{n-1} z_3 + \ldots + y_n^{n-1} z_n &= H_{n-1}, \end{aligned}$$

wenn man die mit y und z bezeichneten Größen sämmtlich durch die Wurzeln x_1, x_2, x_3 .... x_m der Gleichung (1) ausdrückt, in Bezug auf diese Wurzeln symmetrisch, denn bei allen gegenseitigen Vertauschungen der erwähnten Wurzeln bleiben die einzelnen Glieder der obigen Functionen theils ungeändert, theils gehen sie wechselweise in einander über: man kann demnach H_0, H_1, H_2, H_3, ... H_{n-1} aus den Coefficienten der Gleichung (1) nach den Formeln der fünf und zwanzigsten Vorlesung berechnen.

Man bilde die Gleichung, welcher die Wurzeln y_1, y_2, y_3, ... y_n gehören. Sie sey

$$(3)\quad y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + B_3 y^{n-3} + \ldots + B_{n-1} y + B_n = 0.$$

Die Coefficienten B_1, B_2, B_3, ... B_n sind symmetrische Functionen von x_1, x_2, x_3, ... x_m, folglich durch die Coefficienten der Gleichung (1) angebbar. Da der Werth von y_1 bekannt ist, theile man die Gleichung (3) durch den Wurzelfactor $y - y_1$. Der Quotient, welchen wir durch

$$(4)\quad y^{n-1} + C_1 y^{n-2} + C_2 y^{n-3} + C_3 y^{n-4} + \ldots + C_{n-2} y + C_{n-1} = 0$$

andeuten wollen, erscheint als eine Gleichung, welcher die Wurzeln y_2, y_3, y_4, ... y_n zukommen, und deßhalb wird der erste Theil derselben auf Null reducirt, wenn man eine der Größen y_2, y_3, y_4, ... y_n statt y setzt.

Multiplicirt man die Gleichungen (2) von oben herab beziehungsweise mit C_{n-1}, C_{n-2}, C_{n-3}, ... C_3, C_2, C_1, wobei also die letzte Gleichung keinen Multiplicator erhält, und vereiniget man sodann die einzelnen Producte durch Addition, so verschwinden der Gleichung (4) zufolge alle mit z_2, z_3, ... z_n versehenen Glieder der Summe, und es bleibt

$$(y_1^{n-1} + C_1 y_1^{n-2} + C_2 y_1^{n-3} + \ldots + C_{n-2} y_1 + C_{n-1}) z_1 =$$
$$= H_0 C_{n-1} + H_1 C_{n-2} + H_2 C_{n-3} + \ldots + H_{n-2} C_1 + H_{n-1},$$

woraus

$$(5) \quad z_1 = \frac{H_0 C_{n-1} + H_1 C_{n-2} + H_2 C_{n-3} + \ldots + H_{n-2} C_1 + H_{n-1}}{y_1^{n-1} + C_1 y_1^{n-2} + C_2 y_1^{n-3} + \ldots + C_{n-2} y_1 + C_{n-1}}$$

folgt. Diese Formel drückt den Werth von z_1 durch bekannte Größen aus, und stellt demnach die Auflösung der vorgelegten Aufgabe dar.

Man kann der Formel (5) eine andere Gestalt geben, wenn man die Coefficienten $C_1, C_2, C_3 \ldots C_{n-1}$ auf jene der Gleichung (3) zurückführt. Es ist nämlich den Formeln gemäß, welche wir in der drei und zwanzigsten Vorlesung gegeben haben:

$$C_1 = y_1 + B_1$$
$$C_2 = y_1^2 + B_1 y_1 + B_2$$
$$C_3 = y_1^3 + B_1 y_1^2 + B_2 y_1 + B_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{n-1} = y_1^{n-1} + B_1 y_1^{n-2} + B_2 y_1^{n-3} + \ldots + B_{n-2} y_1 + B_{n-1};$$

daher, wenn man der Kürze wegen

$$(6) \begin{cases} H_0 = K_0 \\ H_0 B_1 + H_1 = K_1 \\ H_0 B_2 + H_1 B_1 + H_2 = K_2 \\ H_0 B_3 + H_1 B_2 + H_2 B_1 + H_3 = K_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_0 B_{n-1} + H_1 B_{n-2} + H_2 B_{n-3} + \ldots + H_{n-2} B_1 + H_{n-1} = K_{n-1} \end{cases}$$

setzt:

$$H_0 C_{n-1} + H_1 C_{n-2} + H_2 C_{n-3} + \ldots + H_{n-2} C_1 + H_{n-1} =$$
$$= K_0 y_1^{n-1} + K_1 y_1^{n-2} + K_2 y_1^{n-3} + \ldots + K_{n-2} y_1 + K_{n-1}.$$

Ferner findet man

$$y_1^{n-1} + C_1 y_1^{n-2} + C_2 y_1^{n-3} + \ldots + C_{n-2} y_1 + C_{n-1} =$$
$$= n y_1^{n-1} + (n-1) B_1 y_1^{n-2} + (n-2) B_2 y_1^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + 2 B_{n-2} y_1 + B_{n-1};$$

folglich ist

$$(7) \quad z_1 = \frac{K_0 y_1^{n-1} + K_1 y_1^{n-2} + K_2 y_1^{n-3} + \ldots + K_{n-2} y_1 + K_{n-1}}{n y_1^{n-1} + (n-1) B_1 y_1^{n-2} + (n-2) B_2 y_1^{n-3} + \ldots + 2 B_{n-2} y_1 + B_{n-1}}.$$

Die Formel (5) oder (7) ist nur dann unbrauchbar, wenn ihr Nenner, der partikulären Werthe wegen, welche die in demselben vorhandenen Größen in einem speciellen Falle besitzen, sich auf Null reducirt, wobei, weil z_1 keines unendlichen Wachsens fähig ist, auch der Zähler verschwindet, und diese Formel den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ darbietet. Der erwähnte Nenner ist aber das Resultat, welches aus dem ersten Theile der Gleichung (4) entspringt, wenn man daselbst y_1 statt y setzt; es muß also, wenn dieser Nenner verschwindet, y_1 eine Wurzel der Gleichung (4) seyn, woraus erhellet, daß y_1 in diesem Falle einer oder einigen der Größen $y_2, y_3, y_4 \ldots y_n$ gleich ist, da die Gleichung (4) bloß letztere Größen zu Wurzeln hat. Es tritt also der besprochene Fall nur dann ein, wenn y_1 eine mehrfache Wurzel der Gleichung (3) ist.

Da hier einem und demselben Werthe von y mehrere Werthe von z gehören, und kein Grund vorhanden ist, warum eine Formel, wie (5) oder (7), den einen dieser Werthe eher als den anderen geben sollte, so muß man sich mit der Aufsuchung der Gleichung begnügen, welcher alle diese Werthe von z als Wurzeln gehören. Hiezu gelangt man auf folgende Art.

Es sey y_1 eine $r$fache Wurzel der Gleichung (3), also diese Gleichung durch $(y-y_1)^r$ ohne Rest theilbar. Der Quotient, welcher aus dieser Division hervorgeht, sey

$$(8)\quad y^{n-r}+D_1 y^{n-r-1}+D_2 y^{n-r-2}+\ldots\ldots+D_{n-r-1}\,y+D_{n-r}=0,$$

wobei wir voraussetzen, daß demselben die Wurzel y_1 nicht entspreche. Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung (3), welche der y_1 gleich kommen, durch $y_2, y_3, y_4 \ldots\ldots y_r$, und die davon verschiedenen durch $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots\ldots y_n$, so lassen sich die $n-r+1$ ersten der Gleichungen (2), von welchen bloß allein wir hier Gebrauch machen, so vorstellen:

$$(9)\quad \begin{cases} z_1+z_2+z_3+\ldots\ldots+z_r+z_{r+1}+\ldots+z_n=H_0 \\ y_1(z_1+z_2+z_3+\ldots\ldots+z_r)+y_{r+1}\,z_{r+1}+\ldots+y_n\,z_n=H_1 \\ y_1^2(z_1+z_2+z_3+\ldots\ldots+z_r)+y_{r+1}^2\,z_{r+1}+\ldots+y_n^2\,z_n=H_2 \\ y_1^3(z_1+z_2+z_3+\ldots\ldots+z_r)+y_{r+1}^3\,z_{r+1}+\ldots+y_n^3\,z_n=H_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{n-r}(z_1+z_2+z_3+\ldots\ldots+z_r)+y_{r+1}^{n-1}\,z_{r+1}+\ldots+y_n^{n-r}\,z_n=H_{n-r}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, die letzte ausgenommen, der Reihe nach mit D_{n-r}, D_{n-r-1}, D_{n-r-2}, ... D_3, D_2, D_1, und addirt man sie sodann, so findet man mit Berücksichtigung des Umstandes, daß y_{r+1}, y_{r+2}, y_{r+3} ... y_n die Wurzeln der Gleichung (8) sind:

$$(y_1^{n-r} + D_1 y_1^{n-r-1} + D_2 y_1^{n-r-2} + \ldots + D_{n-r-1} y_1 + D_{n-r}) \times$$
$$\times (z_1 + z_2 + \ldots + z_r)$$
$$= H_0 D_{n-r} + H_1 D_{n-r-1} + H_2 D_{n-r-2} + \ldots + H_{n-r-1} D_1 + H_{n-r},$$

also

$$(10) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_r =$$
$$= \frac{H_0 D_{n-r} + H_1 D_{n-r-1} + H_2 D_{n-r-2} + \ldots + H_{n-r-1} D_1 + H_{n-r}}{y_1^{n-r} + D_1 y_1^{n-r-1} + D_2 y_1^{n-r-2} + \ldots + D_{n-r-1} y_1 + D_{n-r}}.$$

Auf diese Art findet man die Summe aller Werthe der Function z, welche dem Werthe y_1 der Function y correspondiren. Dasselbe Verfahren gibt, wenn man in den Gleichungen (9) statt der Größen z_1, z_2, z_3, ... z_n ihre Quadrate, oder ihre Würfel, oder ihre vierten Potenzen setzt u. s. w., den Werth von $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + z_r^2$, oder von $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \ldots + z_r^3$, oder von $z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + \ldots + z_r^4$ u. s. w. Hat man die Werthe der Summen der r ersten Potenzen der Größen z_1, z_2, z_3, ... z_r berechnet, so ergeben sich daraus nach den Formeln der fünf und zwanzigsten Vorlesung die Coefficienten der Gleichung, welche die Größen z_1, z_2, z_3, ... z_r zu Wurzeln hat.

Um die Coefficienten D_1, D_2, D_3, ... D_{n-r} auf eine bequeme Weise durch B_1, B_2, B_3, ... B_n auszudrücken, dividire man erstlich die Einheit durch $(y-y_1)^r$. Man findet dem in der drei und zwanzigsten Vorlesung gelehrten Verfahren gemäß

$$\frac{1}{(y-y_1)^r} =$$
$$= y^{-r} + r y_1 y^{-r-1} + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} y_1^2 y^{-r-2} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_1^3 y^{-r-3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-r)} y_1^{n-r} y^{-n} + \frac{R}{(y-y_1)^r}.$$

Der Rest R ist ein Polynom, in welchem die an der Größe y haftenden negativen Exponenten von $-n+r-1$ angefangen bis $-n$ steigen. Die Glieder des demselben correspondirenden Quotienten erhält man sogleich, wenn man die Potenz $(y-y_1)^{-r}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.

Multiplicirt man nun den ersten Theil der Gleichung (3) mit dem obigen Ausdrucke für $\frac{1}{(y-y_1)^r}$, indem man im Producte alle Glieder, worin y mit negativen Exponenten erscheint, wegläßt, so hat man offenbar den ersten Theil der Gleichung (8) vor sich. Dem zu Folge ist

$$D_1 = r y_1 + B_1$$

$$D_2 = \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} y_1^2 + r B_1 y_1 + B_2$$

$$D_3 = \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_1^3 + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} B_1 y_1^2 + r B_2 y_1 + B_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{n-r} = \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-r)} y_1^{n-r} + \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-r-1)} B_1 y_1^{n-r-1} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + r B_{n-r-1} y_1 + B_{n-r}.$$

Bedenkt man nun, daß allgemein

$$1 + r + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+\rho-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \rho} =$$
$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+\rho)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \rho} = \frac{(r+\rho)(r+\rho-1)\ldots(\rho+1)}{1 \cdot 2 \ldots r}$$

ist, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Potenzen $(1-z)^{-r}$ und $(1-z)^{-(r+1)}$ nach der Binomialformel entwickelt, dieselben in die identische Gleichung

$$\frac{(1-z)^{-r}}{1-z} = (1-z)^{-(r+1)}$$

oder $(1-z)^{-r}(1+z+z^2+z^3+\ldots \text{rc.}) = (1-z)^{-(r+1)}$

substituirt, und die Coefficienten von z^ρ diesseits und jenseits des Gleichheitszeichens heraushebt: so ergibt sich

$$y_1^{n-r} + D_1 y_1^{n-r-1} + D_2 y_1^{n-r-2} + \ldots + D_{n-r-1} y_1 + D_{n-r} =$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \Big(n(n-1)\ldots(n-r+1) y_1^{n-r}$$
$$+ (n-1)(n-2)\ldots(n-r) B_1 y_1^{n-r-1}$$
$$+ (n-2)(n-3)\ldots(n-r-1) B_2 y_1^{n-r-2} + \ldots$$
$$\ldots + (r+1) r (r-1) \ldots 3 \cdot 2 B_{n-r-1} y_1 + r(r-1)\ldots 2 \cdot 1 B_{n-r} \Big);$$

und wenn man die Größen K_0, K_1, K_2, K_3, rc. in der oben gebrauchten Bedeutung nimmt:

$$H_0 D_{n-r} + H_1 D_{n-r-1} + H_2 D_{n-r-2} + \ldots + H_{n-r-1} D_1 + H_{n-r} =$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(r-1)} \Big((n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) K_0 y_1^{n-r}$$

$$+ (n-2)(n-3)\ldots(n-r) K_1 y_1^{n-r-1}$$

$$+ (n-3)(n-4)\ldots(n-r-1) K_2 y_1^{n-r-2} + \ldots$$

$$\ldots + r(r-1)(r-2)\ldots 3.2 K_{n-r-1} y_1 + (r-1)(r-2)\ldots 2.1 K_{n-r} \Big).$$

Man hat demnach auch

$$(11) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_r =$$

$$= r \cdot \frac{(n-1)\ldots(n-r+1) K_0 y_1^{n-r} + (n-2)\ldots(n-r) K_1 y_1^{n-r-1} + \ldots + (r-1)\ldots 2.1 K_{n-r}}{n\ldots(n-r+1) \cdot y_1^{n-r} + (n-1)\ldots(n-r) B_1 y_1^{n-r-1} + \ldots + r\ldots 2.1 B_{n-r}}$$

Sind die Functionen y_1 und z_1 dergestalt ungleichartig, daß derselbe Werth von z mehreren Werthen von y zugleich zugehört, aber jedem einzelnen y nur ein z entspricht, so können die so eben erklärten Methoden ohne weitere Abänderung angewendet werden. Correspondiren aber der gegebenen Function y_1 mehrere Werthe von z, z. B. $z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$, was daraus erkannt wird, daß Permutationen der Wurzeln der Gleichung (1), durch welche y_1 keine Änderung erfährt, z_1 in z_2, in z_3, 2c. in z_p umstalten, so kann die Summe der Größen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$, ferner die Summe ihrer Amben, die Summe ihrer Ternen 2c. nach den obigen Methoden berechnet werden, und man ist somit im Stande die Gleichung herzustellen, welcher die Größen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$ als Wurzeln zum Grunde liegen.

Der Fall, wenn die Functionen y und z irrational sind, erfordert kein besonderes Verfahren, nur muß man dann diese Functionen in jeder ihrer Bedeutungen in die Rechnung einführen.

Neun und zwanzigste Vorlesung.

Über die Unmöglichkeit, vollständige algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten durch geschlossene Formeln aufzulösen.

Wir haben in den vorhergehenden Vorlesungen einige Aufgaben aus der Theorie der Gleichungen betrachtet, welche eine allgemeine Auflösung verstatten. Es ist uns noch übrig, von dem wichtigsten in diesem Theile der Analysis sich darbietenden Probleme zu sprechen, nämlich von der Auflösung einer vorgelegten allgemeinen Gleichung irgend eines beliebigen Grades, das ist von der Auffindung ihrer Wurzeln.

Der einzige Weg, welcher sich zur Auflösung jeder Gleichung darbietet, ist die Transformation derselben in eine andere auflösbare, wodurch man die Werthe gewisser Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung kennen lernt, und die Berechnung dieser Wurzeln aus den genannten Functionen selbst, oder doch wenigstens aus anderen Functionen, welche von den ersteren mittelst auflösbarer Gleichungen abhängen.

Der Zweck einer allgemeinen Auflösung jeder Gleichung eines vorgeschriebenen Grades ist aber die Construction allgemeiner Formeln, welche die Werthe der Wurzeln dieser Gleichung unmittelbar durch gesonderte Functionen (vergl. erste Vorles.) der Coefficienten der einzelnen Potenzen der unbekannten Größe darstellen.

Ehe wir jedoch zur Aufsuchung solcher Formeln schreiten, ist es nöthig, über die Möglichkeit derselben in das Reine zu kommen. Folgende Betrachtungen, welche wir den Bemühungen Ruffini's verdanken, werden uns hierüber Aufschluß geben.

Es sey

$$(1) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_m = 0$$

eine Gleichung vom m^{ten} Grade mit der unbekannten Größe x, in welcher die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \dots A_m$ keine bestimmten numerischen Werthe besitzen, und von einander gänzlich unabhängig sind; ferner sey

$$(2) \qquad f(A_1, A_2, A_3 \dots A_m)$$

eine wie immer beschaffene Function dieser Coefficienten, welche statt x

in die Gleichung (1) substituirt derselben Genüge leistet, also eine Wurzel derselben ausdrückt: so muß diese Function, wenn man die Wurzeln der Gleichung (1) durch $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ vorstellt, und statt A_1 die Summe, statt A_2 die Summe der Amben, statt A_3 die Summe der Ternen rc., endlich statt A_m das Product der Größen $-x_1, -x_2, -x_3$, rc., $-x_m$ setzt, sich, abgesehen von jeder speciellen Bedeutung der Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, also durch bloße Reduction der Glieder, auf eine dieser Wurzeln zusammenziehen lassen.

So ist z. B. die Function

$$\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$$

der Ausdruck einer der Wurzeln x_1, x_2 der quadratischen Gleichung

$$x^2 + A_1 x + A_2 = 0.$$

Substituirt man in dieser Function $-(x_1 + x_2)$ statt A_1, und $x_1 x_2$ statt A_2, so wird dieselbe

$$= \frac{x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{2} = x_1.$$

Nehmen wir an, die obige Function (2) reducire sich, nachdem die Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ statt der Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ in dieselbe eingeführt worden sind, auf x_1, wie es in dem so eben aufgestellten Beispiele wirklich der Fall ist. Die Rechnungsoperationen, durch welche diese Reduction bewerkstelliget wird, sind von den Werthen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ independent, und gründen sich lediglich auf die Form der Function (2); sie erfolgen demnach auf dieselbe Weise, welche Werthe man auch immer den genannten Größen beilegen mag. Verwechselt man daher die Größen $x_2, x_3, x_4 \ldots x_m$ nach Belieben unter einander, so muß die Formel (2) das vorige Resultat x_1 geben; sie bietet aber sogleich das Resultat x_2 oder x_3, oder x_4 u. s. w. dar, sobald x_2 oder x_3, oder x_4 u. s. w. an die Stelle von x_1 tritt.

Verwechselt man z. B. in der oben betrachteten Function

$$\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{2},$$

indem man genau den früheren Gang der Rechnung beibehält, x_1 mit x_2, so hat man

$$\frac{x_2 + x_1 + x_2 - x_1}{2} = x_2.$$

Hieraus erhellet, daß die Function (2) ihrer Form gemäß, nachdem man aus derselben die Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ mit Hülfe ihrer Abhängigkeit von den Wurzeln der Gleichung (1) weggeschafft hat, bei allen Permutationen dieser Wurzeln nur m verschiedener Werthe, nämlich der Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ fähig seyn wird.

Da die Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ symmetrische Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ sind, so würde die Function (2) nach vollbrachter Einführung dieser Wurzeln symmetrisch ausfallen, also bei allen gegenseitigen Vertauschungen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ nur einen einzigen Werth erhalten, wenn darin keine Wurzelgrößen oder Radicalien vorkämen, welche nach verrichteter Extraction in unsymmetrische Functionen von $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ übergehen.

Da wir hier voraussetzen, die Function (2) sey auf den einfachsten Ausdruck gebracht, welchen sie anzunehmen vermag, so werden die in derselben angedeuteten Extractionen von Wurzeln sich nicht wirklich vornehmen lassen, so lange in derselben $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ stehen. Allein sie müssen sich nach der Substitution der diesen Coefficienten gleichgeltenden Ausdrücke aus dem Grunde wirklich bewerkstelligen lassen, weil sonst die Function (2) nicht durch bloßes gegenseitiges Aufheben ihrer Glieder sich auf eine der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ reduciren ließe, da Radicalien, welche sich als solche tilgen würden, sich schon früher, als noch $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$ in der Function (2) vorhanden waren, aufgehoben hätten.

Untersuchen wir nun die Beschaffenheit des Ausdruckes, welcher aus einer rationalen symmetrischen Function der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ entspringt, wenn diese Function die Extraction der r^{ten} Wurzel verstattet, wobei r eine ganze positive Zahl bedeutet.

Jede beliebige gegenseitige Vertauschung mehrerer Größen kann durch eine Aufeinanderfolge von Vertauschungen zweier dieser Größen erzeugt werden; daher ist jede Function, welche durch keine Verwechslung zweier ihrer Größen eine Änderung erleidet, in Bezug auf diese Größen symmetrisch. Es sey nun F eine rationale symmetrische Function von $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ und $\sqrt[r]{F} = \varphi$, wobei φ eine rationale

Function derselben Größen vorstellt, so besteht die identische Gleichung $\varphi^r = F$. Man vertausche nun zwei der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$, z. B. x_1 und x_2 mit einander, so wird hiedurch weder F geändert, noch die von jeder speciellen Bedeutung der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ unabhängige Gleichung $\varphi^r = F$ verletzt. Geht durch die erwähnte Vertauschung φ in φ_1 über, so hat man also auch $\varphi_1^r = F$, folglich ist auch φ_1 ein Werth von $\sqrt[r]{F}$. Aber jeder der Werthe der r^{ten} Wurzel aus einer Größe entsteht aus jedem anderen Werthe dieser Wurzel, wenn man den letzteren mit einem schicklichen Werthe der r^{ten} Wurzel aus der Einheit multiplicirt; ist nun α ein solcher Werth von $\sqrt[r]{1}$, so haben wir $\varphi_1 = \alpha\varphi$. Man vertausche in dieser Gleichung abermal x_1 mit x_2, so erhält man, weil φ_1 in φ zurück übergeht, $\varphi = \alpha\varphi_1$. Die Verbindung beider Gleichungen gibt $\varphi = \alpha^2\varphi$, also $\alpha^2 = 1$ und $\alpha = \pm 1$. Wir haben aber auch $\alpha^r = 1$, daher ist $\alpha = +1$, wenn r ungerade ist, und nur dann kann $\alpha = -1$ werden, wenn r einen geraden Werth besitzt. Im ersten Falle ist also $\varphi_1 = \varphi$, und im zweiten kann $\varphi_1 = -\varphi$ seyn. Da dasselbe von der Vertauschung jeder zweier anderen der Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ gesagt werden kann, so sieht man, daß jede aus einer symmetrischen Function durch wirkliche Extraction gewonnene Wurzel entweder symmetrisch, oder doch bei allen Vertauschungen der darin befindlichen Größen nur zweier Werthe fähig ist, die sich nicht der Quantität, sondern bloß dem Zeichen nach, von einander unterscheiden.

In der Function (2) können im Allgemeinen Radicalgrößen vorhanden seyn, deren Wurzelzeichen sich über Functionen erstrecken, in welchen andere Radicalgrößen erscheinen, von welchen wieder ein Gleiches gesagt werden kann, u. s. w. Die so eben nachgewiesene Eigenschaft der Wurzeln aus symmetrischen Functionen setzt uns in den Stand, die Beschaffenheit jener irrationalen Bestandtheile der Function (2) zu beurtheilen, unter deren Wurzelzeichen rationale Functionen der Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ stehen.

Eine Function, welche bei allen gegenseitigen Vertauschungen der ihr zum Grunde liegenden Größen nur zwei Werthe anzunehmen vermag, wird nicht geändert, wenn man was immer für drei dieser Größen, z. B. x_1, x_2, x_3, unter einander verwechselt. Denn bringt man x_1 in alle Stellen, worin sich x_3 befindet, und setzt man eben so x_3 statt x_1, und x_2 statt x_2, d. h. läßt man, um uns kurz auszudrü-

cken, die Größen x_1, x_2, x_3 aus ihrer anfänglichen Position in die Stellung x_2, x_3, x_1 übergehen; vertauscht man ferner diese Größen unter einander abermal nach demselben Gesetze, wodurch sie die Stellung x_3, x_1, x_2 erhalten, aus welcher sich durch das nämliche Verfahren die anfängliche Stellung x_1, x_2, x_3 wieder ergibt: so müssen wenigstens zwei der hiedurch bedingten drei Formenwerthe der erwähnten Function einander gleich seyn, da diese Function der Voraussetzung zu Folge dreier verschiedener Werthe nicht fähig ist. Allein welche zwei dieser drei Formenwerthe man einander gleich setzen mag, so folgt daraus, daß auch der dritte denselben gleich ist, denn dieser dritte entspringt aus einem der beiden andern nach demselben Gesetze, wie dieser andere aus dem noch übrigen Werthe, und die Gleichheit jeder zweier Werthe der Function liegt in ihrer Form, nicht aber in der Bedeutung der einzelnen Größen.

Ein rationaler Ausdruck, welcher aus symmetrischen Functionen und aus solchen, denen nur zwei verschiedene Werthe zukommen, wie immer gebildet wird, ist offenbar durch keine gegenseitige Vertauschung dreier der in ihm enthaltenen Größen einer Änderung fähig, da diese Eigenschaft seinen Bestandtheilen selbst zukommt. Es handelt sich also nur mehr um die Beschaffenheit einer durch wirkliche Extraction bestimmten Wurzel aus einem solchen Ausdrucke.

Es sey F eine Function der Größen x_1, x_2, x_3 . . . x_m, welche durch keine gegenseitige Vertauschung dreier derselben geändert wird, und $\sqrt[r]{F} = \varphi$, also $\varphi^r = F$. Man vertausche in dieser identischen Gleichung drei beliebige der genannten Größen, z. B. x_1, x_2, x_3 unter einander, indem man denselben die Stellungen x_2, x_3, x_1 und x_3, x_1, x_2 anweiset, und dabei gehe φ beziehungsweise in φ_1 und φ_2 über, so hat man auch $\varphi_1^r = F$ und $\varphi_2^r = F$; folglich sind φ_1 und φ_2 ebenfalls Werthe von $\sqrt[r]{F}$. Es läßt sich ein Werth von $\sqrt[r]{1}$, z. B. α angeben, für welchen die Gleichung $\varphi_1 = \alpha\varphi$ Statt findet, und da φ_2 aus φ_1 nach demselben Permutationsgesetze erhalten wird, wie φ_1 aus φ, so besteht auch die Gleichung $\varphi_2 = \alpha\varphi_1 = \alpha^2\varphi$. Vertauscht man die Größen x_1, x_2, x_3 in der Gleichung $\varphi_2 = \alpha^2\varphi$ auf dieselbe Weise, so verwandelt sich φ_2 in φ zurück, und man hat $\varphi = \alpha^2\varphi_1 = \alpha^3\varphi$, woraus $\alpha^3 = 1$ folgt. Man hat aber auch $\alpha^r = 1$, folglich ist $\alpha = 1$, wenn r den Factor 3 nicht enthält; ob aber im entgegengesetzten Falle

α nicht jede andere der Cubikwurzeln der Einheit bedeuten kann, bleibt vor der Hand noch unentschieden.

Indessen kann gezeigt werden, daß, sobald die Anzahl der Größen x_1, x_2, x_3 rc. größer ist als 4, α keinen anderen Werth zuläßt, als die positive Einheit. Denn nimmt man zu den bis jetzt betrachteten Größen x_1, x_2, x_3 noch zwei andere, z. B. x_4, x_5 hinzu, so wird erstlich F nicht geändert, wenn die Stellung x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in x_2, x_3, x_1, x_4, x_5 übergeht, denn hier haben nur die drei Größen x_1, x_2, x_3 ihre Plätze gewechselt; ferner ändert sich F nicht, wenn die Stellung x_2, x_3, x_1, x_4, x_5 in x_2, x_3, x_4, x_5, x_1 verwandelt wird, denn hier haben wieder nur drei Größen x_1, x_4, x_5 ihre Stellen umgetauscht; daher erleidet F keine Änderung, wenn die anfängliche Stellung x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sogleich durch x_2, x_3, x_4, x_5, x_1 ersetzt wird.

Bildet man nun die Vertauschungen

$$\begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_1, \\ x_3, & x_4, & x_5, & x_1, & x_2, \\ x_4, & x_5, & x_1, & x_2, & x_3, \\ x_5, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \end{array}$$

wovon jede folgende aus der vorhergehenden nach einem und demselben Permutationsgesetze entspringt, und wie man sieht, die sechste Stellung wieder der ersten gleich wird; so kann F, weil die Form dieser Function so beschaffen ist, daß die erste Umtauschung der fünf Größen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ihren Werth ungeändert läßt, gerade dieser Form wegen auch durch die übrigen Umtauschnngen keine Änderung erfahren. Nennt man nun ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 die diesen Vertauschungen entsprechenden Werthe von F, so sind auch ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5, wie sich durch die oben gebrauchte Schlußweise zeigen läßt, Werthe von $\sqrt[r]{F}$; folglich hat man, wenn β einen Werth von $\sqrt[r]{1}$ bedeutet: $\psi_1 = \beta\varphi$, $\psi_2 = \beta\psi_1 = \beta^2\varphi$, $\psi_3 = \beta\psi_2 = \beta^3\varphi$, $\psi_4 = \beta\varphi_3 = \beta^4\varphi$, endlich $\psi_5 = \beta\psi_4 = \beta^5\varphi$. Aber es ist $\psi_5 = \varphi$, weil die Größen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in ψ_5 dieselbe Stellung haben, wie in φ, folglich ist $\varphi = \beta^5\varphi$, und daher $\beta^5 = 1$.

Aus φ_1, worin die Größen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in der Stellung x_2, x_3, x_1, x_4, x_5 erscheinen, leite man ω_1 nach demselben Gesetze

ab, nach welchem φ in ψ_1 übergeht, so erhalten die genannten Größen in ω_1 die Stellung x_3, x_1, x_4, x_5, x_2; ferner ist aus dem früher erwähnten Grunde ω_1 ein Werth von $\sqrt[r]{F}$ und $\omega_1 = \beta\varphi_1 = \alpha\beta\varphi$. Man bilde nun nach der bei dem Übergange von φ auf ω_1 ersichtlichen Permutationsregel die Vertauschungen

$$\begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \\ x_3, & x_1, & x_4, & x_5, & x_2, \\ x_4, & x_3, & x_5, & x_2, & x_1, \\ x_5, & x_4, & x_2, & x_1, & x_3, \\ x_2, & x_5, & x_1, & x_3, & x_4, \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \end{array}$$

und nenne $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ die der dritten, vierten, fünften und sechsten Stellung gehörenden Werthe von φ, so ist gleichfalls

$$\omega_2 = \alpha\beta\omega_1 = \alpha^2\beta^2\varphi, \quad \omega_3 = \alpha\beta\omega_2 = \alpha^3\beta^3\varphi, \quad \omega_4 = \alpha\beta\omega_3 = \alpha^4\beta^4\varphi,$$
$$\omega_5 = \alpha\beta\omega_4 = \alpha^5\beta^5\varphi.$$

Allein man hat $\omega_5 = \varphi$, folglich ist $\alpha^5\beta^5 = 1$. Nun fanden wir oben $\beta^5 = 1$ und $\alpha^3 = 1$, daher haben wir $\alpha^2 = 1$, und der zwei letzteren Gleichungen wegen auch $\alpha = 1$, folglich auch $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$.

Es wird also eine Function von mehr als vier Größen, welche durch keine gegenseitige Vertauschung dreier dieser Größen eine Änderung erleidet, und die Extraction der r^{ten} Wurzel zuläßt, hiedurch jederzeit einen mit derselben Eigenschaft begabten Ausdruck darbieten.

Hieraus folgt, daß die Function (2), wenn sie sich auf eine den vierten Grad übersteigende Gleichung bezieht, wie auch immer die in ihr vorhandenen Radicalien mit einander verwebt seyn mögen, durch keine gegenseitige Vertauschung dreier der in sie eingeführten Wurzeln eine Änderung erfährt, also bei allen Permutationen dieser Wurzeln nur zweier verschiedener Werthe fähig ist, was der dieser Function nothwendig zukommenden Eigenschaft, so viele Werthe zuzulassen als Wurzeln vorhanden sind, offenbar widerspricht. Es ist also erlaubt zu schließen, daß die Auflösung einer allgemeine Gleichung, deren Grad den vierten überschreitet, durch eine algebraische Formel nicht bewerkstelliget werden kann, weßwegen es völlig unnütz ist, eine solche Formel zu suchen.

Dreißigste Vorlesung.

Über die allgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten und des vierten Grades.

Der Beweis, welchen wir in der vorhergehenden Vorlesung für die Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen, deren Grad den vierten übersteigt, gegeben haben, ist, wie aus dem Gange desselben erhellet, auf die Gleichungen von den niedrigeren Graden nicht anwendbar. In der That hat man diese Gleichungen längst aufgelöst. Wir betrachten hier bloß noch die Gleichungen des dritten und des vierten Grades, da die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades aus den Elementen der Algebra bekannt ist. Folgende Methoden führen am einfachsten zum Ziele.

I. Es sey die allgemeine Gleichung des dritten Grades mit der unbekannten Größe x,

(1) $$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben. Man transformire dieselbe, der in der sieben und zwanzigsten Vorlesung ertheilten Anweisung gemäß, mittelst der Substitution $x = y - \frac{A}{3}$ in eine andere Gleichung desselben Grades, in welcher die zweite Potenz der Unbekannten y fehlt, nämlich in

(2) $$y^3 + Py + Q = 0,$$

so findet man $P = B - \frac{A^2}{3}$, $Q = C - \frac{AB}{3} + \frac{2A^3}{27}$.

Vermag man die Gleichung (2) aufzulösen, so hat man sogleich die Wurzeln der Gleichung (1), wenn man von jenen der erstgenannten Gleichung $\frac{A}{3}$ abzieht.

Setzen wir $y = p + q$, wobei p, q unbestimmte Größen anzeigen, so erhalten wir

$$y^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 3pq(p+q) + p^3 + q^3;$$

oder, wenn wir y statt $p+q$ schreiben,

(3) $$y^3 - 3pqy - (p^3 + q^3) = 0.$$

Wir haben uns hier eine Gleichung des dritten Grades gebildet, in welcher das Quadrat der Unbekannten fehlt, und von welcher wir eine Wurzel, nämlich $p+q$ kennen.

Um die beiden übrigen Wurzeln zu erhalten, theilen wir die Gleichung (3) durch den Wurzelfactor $y-(p+q)$. Es ergibt sich dadurch

$$y^2+(p+q)y+(p+q)^2-3pq=0,$$

woraus $y=-\frac{1}{2}(p+q)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(p+q)^2-(p+q)^2+3pq}$

$$=-\frac{1}{2}(p+q)\pm\frac{1}{2}(p-q)\sqrt{-3}$$

folgt; ein Ausdruck, welcher die zwei verlangten Wurzeln der Gleichung (3) vor Augen legt.

Es ist immer möglich, die Werthe der Größen p, q so zu wählen, daß die Gleichung (3) mit der Gleichung (2) identisch wird. Man setze $-3pq=P$, $-(p^3+q^3)=Q$, so hat man aus der ersten dieser Gleichungen $q=-\frac{P}{3p}$; und wenn man dieses Ergebniß in die andere Gleichung einführt:

$$p^6+Qp^3-\frac{1}{27}P=0. \tag{4}$$

Diese Gleichung vom sechsten Grade kann, wenn man vor der Hand nur den Werth von p^3 sucht, nach Art der quadratischen Gleichungen aufgelöset werden, wodurch man

$$p^3=-\frac{1}{2}Q\pm\frac{1}{2}\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}$$

erhält. Hieraus folgt sodann

$$p=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q\pm\frac{1}{2}\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}}.$$

Dieser Ausdruck gibt, wenn man die Cubikwurzel bei jedem Zeichen der Quadratwurzel in ihrem dreifachen Sinne nimmt, sogleich die sechs Wurzeln der Gleichung (4). Die Größen p, q hängen aber von P, Q auf einerlei Weise ab, daher hat q dieselben sechs Werthe, welche der Größe p zukommen. In der That findet man, wenn man aus den Gleichungen $-3pq=P$ und $-(p^3+q^3)=Q$ die Größe p wegschafft, für q genau die Gleichung (4). Um die zusammengehörigen Werthe von p und q richtig zusammen zu stellen, muß man die Gleichung $-3pq=P$ berücksichtigen.

Aus der sechzehnten Vorlesung erhellet, daß man aus einem der drei Werthe der Cubikwurzel einer Größe die beiden anderen Werthe dieser Wurzel findet, wenn man den ersteren Werth mit $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (welche zwei imaginären Ausdrücke bekannter Maßen Werthe von $\sqrt[3]{1}$ sind) multiplicirt. Man hat daher, wenn man die

beiden Radikalien in dem Ausdrucke

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}}$$

stets in einem und demselben bestimmten Sinne nimmt, und der Kürze wegen R statt $\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}$ schreibt, für p und q die sechs Werthe

$$1)\ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}R},\qquad 4)\ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}R},$$

$$2)\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}R},\qquad 5)\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}R},$$

$$3)\ \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}R},\qquad 6)\ \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}R},$$

wovon der 1ste und 4te, der 2te und 6te, und der 3te und 5te zusammen gehören. Hiedurch ergeben sich für $y=p+q$ genau dieselben drei Werthe, welche man findet, wenn man in den oben aufgestellten Wurzeln der Gleichung (3) nämlich

$$\begin{array}{l} p+q \\ -\tfrac{1}{2}(p+q)+\tfrac{1}{2}(p-q)\sqrt{-3} \\ -\tfrac{1}{2}(p+q)-\tfrac{1}{2}(p-q)\sqrt{-3} \end{array}$$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}R}$ statt p, und $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q-\frac{1}{2}R}$ statt q schreibt.

Die Formel $y=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}R}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}R}$

$$=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}}-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}},$$

welche man die *Cardanische* zu nennen pflegt, bietet also, der Vieldeutigkeit der in ihr erscheinenden Radikalien wegen, sämmtliche drei Wurzeln der Gleichung $y^3+Py+Q=0$ dar.

Ist P positiv, so ist $R=\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}$ eine reelle Größe, folglich hat y in diesem Falle einen reellen und zwei imaginäre Werthe. Dasselbe findet Statt, wenn P negativ ist, aber doch $Q^2+\frac{4}{27}P^3$ positiv ausfällt. Wird $Q^2+\frac{4}{27}P^3=0$, so geben die obigen Formeln für y die drei Werthe $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q}$, $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q}$, $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}Q}$, d. h. die Gleichung (2) hat in diesem Falle drei reelle Wurzeln, wovon zwei einander gleich sind. Erhält endlich $Q^2+\frac{4}{27}P^3$ einen negativen Werth, so wird $\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}$ imaginär, und die drei Wurzeln der Gleichung (2) erscheinen unter imaginären Formen. Aber jeder Gleichung von ungerader Ordnung gehört wenigstens eine reelle Wurzel; daher müssen sich

die imaginären Bestandtheile wenigstens in dem Ausdrucke einer der drei Wurzeln der Gleichung (2) tilgen. Indessen läßt sich leicht zeigen, daß in diesem letzteren Falle, welchen die älteren Algebraisten, der Schwierigkeiten wegen, die sie dabei fanden, casus irreducibilis nannten, jederzeit sämmtliche Werthe von y reell sind.

Es sey w die reelle Wurzel, welche der Gleichung (2) nothwendiger Weise zukommt. Dividirt man diese Gleichung durch den Wurzelfactor $y - w$, so erhält man zur Bestimmung ihrer übrigen Wurzeln

$$y^2 + wy + w^2 + P = o.$$

Diese Wurzeln sind demnach

$$y = -\tfrac{1}{2}w + \sqrt{-\tfrac{3}{4}w^2 - P} \quad \text{und} \quad y = -\tfrac{1}{2}w - \sqrt{-\tfrac{3}{4}w^2 - P};$$

oder, wenn wir $-\frac{3}{4}w^2 - P = k$ setzen:

$$y = -\tfrac{1}{2}w + \sqrt{k} \quad \text{und} \quad y = -\tfrac{1}{2}w - \sqrt{k}.$$

Da w eine Wurzel der Gleichung (2) ist, so muß $w^3 + Pw + Q = o$ oder $Q = -w^3 - Pw$ seyn. Wir haben aber $P = -\frac{3}{4}w^2 - k$, folglich $Q = -\frac{1}{4}w^3 + kw$.

Mit Hülfe dieser Ausdrücke findet man

$$Q^2 + \tfrac{4}{27}P^3 = -\tfrac{3}{4}kw^4 + \tfrac{3}{2}k^2w^2 - \tfrac{4}{27}k^3 = -3k(\tfrac{1}{2}w^2 - \tfrac{2}{9}k)^2.$$

Der Factor $(\frac{1}{2}w^2 - \frac{2}{9}k)^2$ ist keines negativen Werthes fähig; daher ist das Zeichen von k jenem der Größe $Q^2 + \frac{4}{27}P^3$ entgegengesetzt. Es ist also k positiv, wenn $Q^2 + \frac{4}{27}P^3$ negativ ausfällt, und dabei sind die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung (2), nämlich $-\frac{1}{2}w + \sqrt{k}$ und $-\frac{1}{2} - \sqrt{k}$, reelle Größen.

Die Voraussetzung $Q^2 + \frac{4}{27}P^3 = o$ gibt entweder $k = o$ oder $\frac{1}{2}w^2 - \frac{2}{9}k = o$. Aus der ersteren Annahme folgen w, $-\frac{1}{2}w$, $-\frac{1}{2}w$ als die drei Wurzeln der Gleichung (2); aus der letzteren Annahme erhält man wegen $k = \frac{9}{4}w^2$, w, w, $-2w$ für die Werthe dieser Wurzeln. Das letzte Glied Q der Gleichung ist das Product der mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln; bestimmt man hieraus unter der einen oder unter der anderen Annahme den Werth von w, so ergeben sich die Wurzeln

$$-2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q},\ +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q},\ +\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q} \text{ wie oben.}$$

Die Formel $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R}$, worin $R = \sqrt{Q^2 + \frac{4}{27}P^3}$, läßt sich, in so fern sie die der Gleichung

$$y^3 + Py + Q = o$$

nothwendig zukommende reelle Wurzel darstellt, mit Hülfe der Kreisfunctionen auf eine zur Rechnung bequeme Gestalt bringen.

Es sey erstlich P eine positive Größe. Da bei dieser Voraussetzung die Zahl $\frac{4}{27}\frac{P^3}{Q^2}$, der Realität von R unbeschadet, jedes positiven Werthes, von 0 angefangen, fähig ist, so setze man $\frac{4}{27}\frac{P^3}{Q^2} = tg.\varphi^2$, wodurch $Q = \frac{2}{tg.\varphi}\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ und $R = Q\sqrt{1 + tg.\varphi^2} = \frac{2}{sin.\varphi}\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$,

folglich
$$y = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1 - cos.\varphi}{sin.\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1 + cos.\varphi}{sin.\varphi}}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{tg.\tfrac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{cot.\tfrac{1}{2}\varphi}\right)$$

wird. Läßt man nun $\sqrt[3]{tg.\frac{1}{2}\varphi} = tg.\psi$ seyn, so ergibt sich
$$y = \sqrt{\frac{P}{3}}\,(tg.\psi - cot.\psi) = \sqrt{\frac{P}{3}}\cdot\frac{tg.\psi^2 - 1}{tg.\psi}.$$

Es ist aber $tg.2\psi = \frac{2\,tg.\psi}{1 - tg.\psi^2}$, folglich $\frac{tg.\psi^2 - 1}{tg.\psi} = -2\,cot.2\psi$, daher hat man $y = -2\sqrt{\frac{P}{3}}\,.\,cot.2\psi$. Bei dem Gebrauche dieses Ausdruckes wird man zuerst mittelst der Formel $tg.\varphi = \frac{2}{Q}\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ den Bogen φ, und sodann mittelst der Formel $tg.\psi = \sqrt[3]{tg.\frac{1}{2}\varphi}$ den Bogen ψ berechnen.

Ist P eine negative Größe, so fordert die Realität der Größe R, daß der numerische Werth des Bruches $\frac{2}{Q}\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ die Einheit nicht übersteige. Man setze also $\frac{2}{Q}\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = sin.\varphi$, so wird

$$R = 2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} cot.\varphi \text{ und } y = -\sqrt{-\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{tg.\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{cot.\tfrac{1}{2}\varphi}\right).$$

Nimmt man nun $\sqrt[3]{tg.\frac{1}{2}\varphi} = tg.\psi$ an, so erhält man
$$y = -\sqrt{-\frac{P}{3}}\,(tg.\psi + cot.\psi) = -\sqrt{-\frac{P}{3}}\cdot\frac{tg.\psi^2 + 1}{tg.\psi}.$$

Aber wegen $sin.\psi = \frac{tg.\psi}{\sqrt{1+tg.\psi^2}}$, $cos.\psi = \frac{1}{\sqrt{1+tg.\psi^2}}$ und $sin.2\psi = 2\,sin.\psi\,cos.\psi$ ist

$\frac{1+tg.\psi^2}{tg.\psi} = \frac{2}{sin.2\psi}$: folglich hat man $y = -\frac{2}{sin.2\psi}\sqrt{-\frac{P}{3}}$.

Fällt R imaginär aus, so muß man zur Auflösung der Gleichung $y^3 + Py + Q = 0$ mit Hülfe der Kreisfunctionen folgenden Weg einschlagen:

Man setze $y = r\,sin.\varphi$, wobei r und φ noch unbestimmt sind, so hat man wegen $sin.\varphi^3 = -\frac{1}{4}(sin.3\varphi - 3\,sin.\varphi)$ die Gleichung

$$y^3 - \tfrac{3}{4}r^3\,sin.\varphi + \tfrac{1}{4}r^3\,sin.3\varphi = 0;$$

oder, wenn man y statt $r\,sin.\varphi$ schreibt:

$$(4) \qquad y^3 - \tfrac{3}{4}r^2 y + \tfrac{1}{4}r^3\,sin.3\varphi = 0,$$

welcher Gleichung offenbar die Wurzel $r\,sin.\varphi$ entspricht. Hier kann man aber für φ jeden der unzähligen Bogen nehmen, deren Dreifache einen und denselben Sinus, nämlich $sin.3\varphi$ besitzen. Diese Werthe von φ sind die dritten Theile der Bogen

$$3\varphi,\ 2\pi+3\varphi,\ 4\pi+3\varphi,\ 6\pi+3\varphi,\ 8\pi+3\varphi,\ \text{rc.}$$
$$\pi-3\varphi,\ 3\pi-3\varphi,\ 5\pi-3\varphi,\ 7\pi-3\varphi,\ \text{rc.}$$

Vergleicht man die Sinusse der erwähnten Drittheile mit einander, so findet man leicht, daß ihnen einer der drei Werthe

$$sin.\varphi,\ sin.\left(\tfrac{2}{3}\pi+\varphi\right),\ sin.\left(\tfrac{4}{3}\pi+\varphi\right)$$

oder $\quad sin.\varphi,\ sin.\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right),\ -sin.\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$

zukommt; es sind demnach

$$r\,sin.\varphi,\ r\,sin.\left(\tfrac{\pi}{3}-\varphi\right),\ -r\,sin.\left(\tfrac{\pi}{3}+\varphi\right)$$

die drei Wurzeln der Gleichung (4).

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (2) überein, wenn man $-\frac{3}{4}r^2 = P$, $\frac{1}{4}r^3\,sin.3\varphi = Q$ setzt. Dann ist

$$r = 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \text{ und } sin.3\varphi = \frac{Q}{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da hiedurch die Werthe von r und φ gegeben sind, so kennt man also auch die Wurzeln der Gleichung (2).

II. Soll die allgemeine Gleichung des vierten Grades

(5) $$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

aufgelöset werden, so schaffe man aus derselben durch die Substitution $x = y - \frac{A}{4}$ das zweite Glied weg. Man erhält hiedurch die transformirte Gleichung

(6) $$y^4 + Py^2 + Qy + R = 0,$$

in welcher $P = B - \frac{3}{8}A^2$, $Q = C - \frac{AB}{2} + \frac{A^3}{8}$

$$R = D - \frac{AC}{4} + \frac{A^2B}{16} - \frac{3A^4}{256}$$ ist.

Man setze nun $y = p + q + r$, so wird, wenn man der Kürze wegen $p^2 + q^2 + r^2 = g$ setzt,

$$y^2 = g + 2(pq + pr + qr),$$

folglich $$y^2 - g = 2(pq + pr + qr).$$

Quadrirt man diese Gleichung, und läßt man $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = h$, $p^2q^2r^2 = k$ seyn, so findet man

$$y^4 - 2gy^2 + g^2 = 4h + 8\sqrt{k}(p + q + r) = 4h + 8\sqrt{k}.y,$$

folglich

(7) $$y^4 - 2gy^2 - 8\sqrt{k}\,.\,y + g^2 - 4h = 0.$$

Wir haben somit eine Gleichung vom vierten Grade, in welcher das zweite Glied fehlt, und von welcher $p + q + r$ eine Wurzel darstellt. Diese Gleichung wird mit der eigentlich aufzulösenden (6) identisch, wenn man

$-2g = P$, $-8\sqrt{k} = Q$, $g^2 - 4h = R$ setzt, woraus

$g = \frac{-P}{2}$, $h = \frac{P^2 - 4R}{16}$, $k = \frac{Q^2}{64}$ folgt.

Da $p^2 + q^2 + r^2 = g$, $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = h$, $p^2q^2r^2 = k$ ist, so sind p^2, q^2, r^2 die drei Wurzeln der Gleichung

$$z^3 - gz^2 + hz - k = 0,$$ oder

(8) $$z^3 + \frac{P}{2}z^2 + \frac{P^2 - 4R}{16}z - \frac{Q^2}{64} = 0.$$

Hat man die Gleichung (8) aufgelöst, so kennt man die Quadrate der Größen p, q, r. Die Wurzeln dieser Quadrate kann man sowohl positiv, als auch negativ nehmen, daher hat man für y folgende acht Werthe:

(9)		(10)
	$p + q + r$	$p + q - r$
	$p - q - r$	$p - q + r$
	$-p + q - r$	$-p + q + r$
	$-p - q + r.$	$-p - q - r.$

Da in der Gleichung (8) bloß die zweite Potenz von Q erscheint, so gilt diese Gleichung auch für den Fall, wenn in der Gleichung (6) das Zeichen von Q geändert wird; weßwegen wir auch acht Werthe statt vieren für y erhalten haben. In (9) und (10) sind bloß jene Bedeutungen von p, q, r zusammengestellt, welche dem Producte pqr einerlei Zeichen ertheilen. Ob die eine oder die andere Parthie der Werthe von y die Wurzeln der vorgelegten Gleichung darbietet, muß mittelst der Gleichung $p^2 q^2 r^2 = \frac{Q^2}{64}$ oder $pqr = \frac{Q}{8}$ entschieden werden.

Ein und dreißigste Vorlesung.

Über einige specielle Gleichungen von unbestimmter Ordnung.

Sobald die Coefficienten der Potenzen der unbekannten Größe in einer algebraischen Gleichung nicht jeder beliebigen Werthe fähig sind, sondern nach gewissen Gesetzen von einander abhängen, so bestehen auch zwischen den Wurzeln der Gleichung gewisse Beziehungen, vermöge welchen die in der neun und zwanzigsten Vorlesung angestellten Betrachtungen auf den vorliegenden Fall keine Anwendung erleiden. Denn alle Reductionen, welche wir uns in der angeführten Vorlesung zwischen den Wurzeln der Gleichung vorgenommen dachten, mußten unabhängig von jeder speciellen Bedeutung dieser Wurzeln vor sich gehen, was nun nicht mehr Statt finden kann. Es ist daher immerhin möglich, daß eine Gleichung von der oben vorausgesetzten Beschaffenheit eine allgemeine Auflösung verstatte. Folgende Beispiele werden das Gesagte erläutern.

I. Betrachten wir die sogenannten reciproken Gleichungen. In denselben ist, wenn sie auf die gewöhnliche Weise geordnet werden, das letzte Glied dem Coefficienten des ersten Gliedes gleich, und je zwei vom ersten und letzten gleichweit entfernte Glieder besitzen einerlei Coefficienten. Ihre allgemeine Form ist

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots$$
$$\dots + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0,$$

aus welcher erhellet, daß, wenn w eine Wurzel der Gleichung ist, auch der reciproke Werth dieser Größe, nämlich $\frac{1}{w}$, derselben Genüge leistet.

Ist eine reciproke Gleichung von ungerader Ordnung, so entspricht derselben offenbar die Wurzel -1, und man kann sie durch Division mit dem Wurzelfactor $x+1$ auf einen um die Einheit niedrigeren Grad bringen. Die Formeln der drei und zwanzigsten Vorlesung geben den Quotienten

$$x^{m-1} - (1 - A_1) x^{m-2} + (1 - A_1 + A_2) x^{m-3} - \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots + (1 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots + A_3) x^2$$
$$-(1 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots + A_3 - A_2) x$$
$$+ 1 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots + A_3 - A_2 + A_1 = 0$$

oder

$$x^{m-1} - (1-A_1)x^{m-2} + (1-A_1+A_2)x^{m-3} - \dots\dots$$
$$\dots\dots + (1-A_1+A_2)x^2 - (1-A_1)x + 1 = 0,$$

welche Gleichung eine reciproke von gerader Ordnung ist.

Jede reciproke Gleichung von gerader Ordnung läßt sich, ihrer besonderen Form wegen, auf eine Gleichung reduciren, deren Ordnungsexponent nur die Hälfte des vorigen beträgt. Es sey

$$(1) \quad x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \dots\dots + A_n x^n + \dots$$
$$\dots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0$$

eine solche Gleichung vom Grade $2n$, so erhält sie, wenn man alle Glieder durch x^n theilt, und je zwei vom Anfange und Ende des ersten Theiles gleich weit abstehende zusammennimmt, die Form

$$x^n + \frac{1}{x^n} + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + A_2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \dots\dots$$
$$\dots\dots + A_{n+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0.$$

Man setze nun $x + \frac{1}{x} = y$, so hat man, weil allgemein

$$\left(x^r + \frac{1}{x^r}\right)y = x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} + x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}} \text{ oder}$$

$$x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right)y - \left(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\right) \text{ ist:}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (y^2 - 2)\, y - y = y^3 - 3y$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (y^3 - 3y)\, y - (y^2 - 2) = y^4 - 4y^2 + 2$$

u. s. w.,

und man ist somit im Stande, die Summe $x^r + \frac{1}{x^r}$ für jeden ganzen positiven Werth von r durch y darzustellen. Zu dem allgemeinen Ausdrucke für $x^r + \frac{1}{x^r}$ gelangt man am schnellsten auf folgende Art.

Die Gleichung $x + \frac{1}{x} = y$ gibt $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$, woraus erhellet, daß x imaginär wird, wenn y weniger als 2 beträgt. Fassen wir diesen Fall in das Auge, und setzen wir deßhalb $y = 2\cos.\alpha$, so finden wir

$$x = \cos.\alpha + \sqrt{-1}\ \sin.\alpha$$
$$\frac{1}{x} = \cos.\alpha - \sqrt{-1}\ \sin.\alpha;$$

also nach dem Moivre'schen Satze, in so fern r eine ganze Zahl vorstellt:

$$x^r + \frac{1}{x^r} = 2\cos.r\alpha.$$

Entwickeln wir $\cos.r\alpha$ nach der Formel (85) der achtzehnten Vorlesung, und schreiben wir überall y statt $2\cos.\alpha$, so ergibt sich für jeden ganzen positiven Werth der Zahl r

$$(2)\quad x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{1\,.\,2}y^{r-4} - \frac{r(r-4)(r-5)}{1\,.\,2\,.\,3}y^{r-6} + \text{ic.},$$

welche Reihe aber nur so weit fortgesetzt werden darf, als es geschehen kann, ohne der Größe y negative Exponenten zu ertheilen.

Die Formel (2) gilt aber auch für jeden beliebigen reellen Werth von x, da sie eine identische Gleichung darstellt. Denn wäre der Ausdruck

$$x^r + \frac{1}{x^r} - \left(y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{1\,.\,2}y^{r-4} - \text{ic.}\right) = 0$$

kein solcher, welcher durch bloße Reduction seiner Glieder verschwindet, so hätte man, wenn man überall $x + \frac{1}{x}$ statt y setzt, die Potenzen dieser Größe nach der Binomialformel entwickelt, und alles nach den Potenzen von x ordnet, eine Gleichung vom $2r^{ten}$ Grade mit der unbekannten Größe x, welche für jeden Werth von α die Wurzel $\cos.\alpha + \sqrt{-1}\ \sin.\alpha$ zuließe, der also mehr als 2r Wurzeln zugehörten, was ungereimt ist.

Mit Hülfe der Formel (2) wird die Gleichung (1) auf eine Gleichung vom n^{ten} Grade reducirt, deren unbekannte Größe y ist. Jeder Werth von y verhilft zu zwei Wurzeln der Gleichung (1).

Wir sind also im Stande, reciproke Gleichungen bis zum $2\,.\,4 + 1 = 9^{ten}$ Grade allgemein aufzulösen.

II. Die Gleichung $x^m - 1 = 0$ führt, wenn man die ihr entsprechende Wurzel 1 durch Division mit dem Factor $x - 1$ wegschafft, auf eine reciproke Gleichung

$$x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots\ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Diese kann daher nach dem so eben erklärten Verfahren auf einen wenigstens um die Hälfte niedrigeren Grad herabgesetzt werden.

Da die m Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$ die m Werthe der Potenz $1^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{1}$ sind, und wir diese letzteren bereits in der sechzehnten Vorlesung aus Moivre's Formel abgeleitet haben, so befinden wir uns im Stande, die angeführte Gleichung durch Kreisfunctionen allgemein aufzulösen. Die Wurzeln derselben sind also

$$1, \quad \cos.\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2\pi}{m}, \quad \cos.\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{4\pi}{m},$$
$$\cos.\frac{6\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{6\pi}{m}, \text{ 2c.}$$

welche Reihe so lange fortzusetzen ist, bis der Coefficient von π die Zahl m zu übersteigen anfängt. Man kann diese Wurzeln, wenn man es bequemer findet, auch durch die Reihe

$$1, \quad \cos.\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2\pi}{m}, \quad \cos.\frac{4\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{4\pi}{m},$$
$$\cos.\frac{6\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{6\pi}{m}, \text{ 2c. bis } \cos.\frac{2(m-1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2(m-1)\pi}{m}$$

darstellen. Die Endglieder dieser Reihe correspondiren den Anfangsgliedern derselben, wenn man das Zeichen des Radicals $\sqrt{-1}$ ändert. Nimmt man je zwei correspondirende Wurzelfactoren zusammen, so ergibt sich, wenn man den Coefficienten von π stets kleiner seyn läßt als m:

$$x^m - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos.\frac{2\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos.\frac{4\pi}{m} + 1\right)\times$$
$$\times\left(x^2 - 2x\cos.\frac{6\pi}{m} + 1\right) \text{ 2c.}$$

Ist m gerade, so gehört noch der Factor $x+1$ dazu.

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{x}{a}$ statt x, und schafft man sodann die Nenner weg, so hat man

$$x^m - a^m = (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{4\pi}{m} + a^2\right)\times$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{6\pi}{m} + a^2\right) \text{ 2c.};$$

wozu, wenn m gerade ist, noch der Factor $x+a$ hinzukommt.

Auf dieselbe Art erhält man, weil

$$\cos.\frac{\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{\pi}{m}, \quad \cos.\frac{3\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{3\pi}{m},$$
$$\cos.\frac{5\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{5\pi}{m} \text{ 2c.}$$

die Wurzeln der Gleichung $x^m+1=0$ sind:

$$x^m+1=\left(x^2+2x\cos.\frac{\pi}{m}+1\right)\left(x^2+2x\cos.\frac{3\pi}{m}+1\right)\times$$
$$\times\left(x^2+2x\cos.\frac{5\pi}{m}+1\right) \text{ꝛc.},$$

wozu, wenn m ungerade ist, noch der Factor $x+1$ gehört; und

$$x^m+a^m=\left(x^2+2ax\cos.\frac{\pi}{m}+a^2\right)\left(x^2+2ax\cos.\frac{3\pi}{m}+x^2\right)\times$$
$$\times\left(x^2+2ax\cos.\frac{5\pi}{m}+a^2\right) \text{ꝛc.},$$

wozu, wenn m ungerade ist, noch der Factor $x+a$ gehört.

Die Wurzeln der Gleichung $x^m-1=0$ besitzen merkwürdige Eigenschaften, welche bei verschiedenen analytischen Untersuchungen wichtige Dienste leisten. Wir wollen diese Gelegenheit benützen, dieselben kennen zu lernen.

Es sey m eine Primzahl, und α eine von der Einheit verschiedene Wurzel der genannten Gleichung, also $\alpha^m=1$, so ist auch $(\alpha^2)^m=(\alpha^m)^2=1$, $(\alpha^3)^m=1$, $(\alpha^4)^m=1$ u. s. w., folglich sind auch α^2, α^3, α^4 .... Wurzeln derselben Gleichung. Aber die $m-1$ Größen α, α^2, α^3, α^4 .... α^{m-1} sind sämmtlich von einander verschieden. Denn sind α^g und α^h zwei derselben, und wäre $\alpha^g=\alpha^h$, so wäre auch $\alpha^{h-g}=1$. Allein, in der Reihe der m Zahlen $h-g$, $2(h-g)$, $3(h-g)$ .... $(m-1)(h-g)$ kommt, wie wir bereits in der sechs und zwanzigsten Vorlesung (S. 166) bemerkt haben, gewiß eine, z. B. $k(h-g)$ vor, welche durch m getheilt, die Einheit zum Reste läßt, oder die Form $qm+1$ hat; es wäre demnach $\alpha^{k(h-g)}=\alpha^{qm+1}=1$ oder $(\alpha^m)^q\,.\,\alpha=1$, d. h. $\alpha=1$ gegen die Voraussetzung. Derselbe Schluß zeigt zugleich, daß keine Potenz von α, deren Exponent kleiner ist als m, der Einheit gleich kommt. Es sind folglich die Potenzen

$$\alpha^0,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ \alpha^{m-1}$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^m-1=0$, woraus erhellet, daß jede von 1 verschiedene Wurzel dieser Gleichung, wenn der Ordnungsexponent derselben eine Primzahl ist, alle übrigen Wurzeln durch fortgesetztes Potenziren darbietet.

Jede beliebige Potenz von α mit einem ganzen positiven oder negativen Exponenten, z. B. α^p ist, wenn man p durch m theilt, und dabei den positiven Rest r erhält, der Potenz α^r gleich, und daher

eine Wurzel der obigen Gleichung. Setzt man also statt α in der Reihe

$$\alpha^0,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ \alpha^{m-1}$$

die Potenz α^p, und reducirt man die Exponenten

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p,\ \ldots\ (m-1)p$$

durch Division mit m auf ihre Reste, so hat man, der Verschiedenheit dieser Reste wegen, abermal alle Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$, jedoch nur in anderer Ordnung, vor sich.

Diese Eigenschaft der Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$ unterliegt Beschränkungen, wenn der Ordnungsexponent m keine Primzahl ist. Stellt n einen Divisor von m vor, und setzt man $m = n\nu$, so ist jede Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$ auch eine Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$. Denn hat α die Eigenschaft, zur n^{ten} Potenz erhoben, die Einheit zu erzeugen, so ist auch $(\alpha^n)^\nu$ oder $\alpha^m = 1$. Aber die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ geben, wie immer in Bezug auf ganze Exponenten potenzirt, bloß Wurzeln dieser letztern Gleichung, daher gibt nicht jede von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ durch fortgesetztes Potenziren sämmtliche übrigen Wurzeln.

Es sey m das Product der zwei Primzahlen p, q; ferner α eine Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, und β eine Wurzel der Gleichung $x^q - 1 = 0$, und sowohl α als auch β von der Einheit verschieden. Das Product $\alpha\beta$ ist eine Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ oder $x^{pq} - 1 = 0$; denn wir haben, dem oben Erwiesenen zufolge, sowohl $\alpha^m = 1$ als auch $\beta^m = 1$, also auch $(\alpha\beta)^m = 1$. Bildet man die Reihe der Potenzen

$$(\alpha\beta)^0,\ (\alpha\beta)^1,\ (\alpha\beta)^2,\ (\alpha\beta)^3,\ \ldots\ (\alpha\beta)^{m-1},$$

so werden die p verschiedenen Wurzeln der Gleichung $x^p - 1 = 0$ mit den q Wurzeln von $x^q - 1 = 0$, nämlich

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ \alpha^{p-1} \text{ mit } \beta^0,\ \beta^1,\ \beta^2,\ \beta^3,\ \ldots\ \beta^{q-1}$$

auf alle möglichen Arten combinirt, und die hieraus entspringenden, unter einander durchgehends verschiedenen Producte sind sämmtliche Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$. Dasselbe kann, wenn $m = pqr \ldots$ ist, und p, q, r, ... Primzahlen anzeigen, auch von dem Producte $\alpha\beta\gamma \ldots$ bewiesen werden, worin α, β die obigen Bedeutungen haben, und γ eine Wurzel der Gleichung $x^r - 1 = 0$, die Einheit ausgenommen, vorstellt, u. s. w.

Ist $m = p^n$, p eine Primzahl, und bedeutet α eine von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, so ist nicht nur allein α, sondern es sind sogar $\sqrt[p]{\alpha}$, $\sqrt[p^2]{\alpha}$, $\sqrt[p^3]{\alpha}$, ... $\sqrt[p^{n-1}]{\alpha}$ Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$. Sollen obige Resultate Statt finden, so muß man $\sqrt[p]{\alpha}$ statt β, $\sqrt[p^2]{\alpha}$ statt γ setzen, u. s. w.

Ist im Allgemeinen $m = p^n q^v r^w \ldots$, und sind $p, q, r \ldots$ Primzahlen, ferner $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ beziehungsweise Wurzeln der Gleichungen $x^p - 1 = 0$, $x^q - 1 = 0$, $x^r - 1 = 0$, ...; läßt man endlich $\alpha_1 = \sqrt[p]{\alpha}$, $\alpha_2 = \sqrt[p]{\alpha_1}$, etc. $\beta_1 = \sqrt[q]{\beta}$, $\beta_2 = \sqrt[q]{\beta_1}$, etc. $\gamma_1 = \sqrt[r]{\gamma}$, $\gamma_2 = \sqrt[r]{\gamma_1}$, etc. seyn, so ist $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \times \beta\beta_1\beta_2 \ldots \ldots \times \gamma\gamma_1\gamma_2 \ldots$ eine Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$, deren Potenzen mit den Exponenten 0, 1, 2, 3, 4 ... $m - 1$ sämmtliche Wurzeln dieser Gleichung geben. Hiedurch wird die Auflösung der Gleichung $x^m - 1 = 0$ auf die Auflösung der Gleichungen $x^p - 1 = 0$, $x^q - 1 = 0$, $x^r - 1 = 0$, etc., deren Ordnungszahlen Primzahlen sind, zurückgeführt.

Sucht man die Summen der Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$ nach den Formeln der fünf und zwanzigsten Vorlesung, so findet man diese Summe $= m$ oder $= 0$, je nachdem der gemeinschaftliche Exponent aller Potenzen ein Vielfaches vom m ist oder nicht.

Alle diese Resultate lassen sich auch aus den Ausdrücken der Wurzeln der Gleichung $x^m - 1 = 0$ durch Kreisfunctionen ableiten *).

III. Die Formeln, welche wir in der siebzehnten und achtzehnten Vorlesung entwickelt haben, führen ebenfalls auf allgemein auflösbare Gleichungen. Um hievon ein Beispiel zu geben, betrachten wir die Formel (85), und setzen wir

$$y^m - \frac{1}{4} m y^{m-2} + \frac{1}{16} \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} y^{m-4} - \frac{1}{64} \frac{m(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{m-6} + \text{etc.} = 0,$$

so haben wir eine Gleichung vom m^{ten} Grade, deren sämmliche Wurzeln aus dem Ausdrucke $y = \cos.\alpha$ hervorgehen, wenn man für α die

*) Über die merkwürdige, von Gauß zuerst gelehrte, Auflösung der Gleichung $x^m - 1 = 0$ sehe man dessen Disquisitiones arithmeticae, *Lipsiae* 1801; und Lagrange's Traité de la résolution des équations numériques, 2. édit. *Paris* 1808.

Bogen setzt, durch welche $\cos. m\alpha$ auf Null reducirt wird. Diese Bogen sind in der allgemeinen Form $\frac{(2r+1)\pi}{2m}$ enthalten, wenn man r jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten läßt. Hiedurch aber erhält y nur folgende verschiedenen Werthe

$$\pm \cos.\frac{\pi}{2m},\quad \pm \cos.\frac{3\pi}{2m},\quad \pm \cos.\frac{5\pi}{2m},\quad \pm \cos.\frac{7\pi}{2m} \text{ etc.},$$

welche Reihe sich mit $\pm \cos.\frac{(m-1)\pi}{2m}$ oder mit $\cos.\frac{m\pi}{2m} = 0$ endigt, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

Diese Betrachtungen liefern uns auch die Gleichung

$$\cos. m\alpha =$$
$$= 2^{m-1}\left[(\cos.\alpha)^2 - \left(\cos.\frac{\pi}{2m}\right)^2\right]\left[(\cos.\alpha)^2 - \left(\cos.\frac{3\pi}{2m}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[(\cos.\alpha)^2 - \left(\cos.\frac{5\pi}{2m}\right)^2\right] \text{ etc.},$$

in welcher die Factoren so weit fortgehen, als der Coefficient von π die Zahl $2m$ nicht übertrifft. Ist m ungerade, so gehört noch der Factor $\cos.\alpha$ dazu.

Ähnliche Resultate verschaffen die übrigen Formeln der erwähnten Vorlesungen, aus welchen auch die Gleichungen (101) und (104) der neunzehnten Vorlesung nach der Methode der Grenzen sich folgern lassen.

Von den Wurzeln der Gleichungen dieser Gattung hängt die Berechnung der Sehnen ab, welche je zwei Theilungspuncte der in gleiche Theile getheilten Peripherie eines Kreises verbinden.

Zwei und dreißigste Vorlesung.

Über die Auflösung numerischer Gleichungen.

Jede Gleichung mit einer unbekannten Größe x, in welcher bloß rationale Coefficienten vorkommen, läßt sich, wenn man die in der sieben und zwanzigsten Vorlesung II. gelehrte Transformation zu Hülfe nimmt, auf die Form

$$(1)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

bringen, worin der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten die Einheit ist, und die übrigen Coefficienten sammt dem letzten Gliede ganze Zahlen sind.

In dieser Form läßt die Gleichung (1) keine gebrochene rationale Wurzel zu. Denn könnte dieser Gleichung durch die Substitution $x = \frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen anzeigen, welche außer der Einheit keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, Genüge geleistet werden, d. h. wäre

$$\frac{p^m}{q^m} + A_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2 \frac{p^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots\ldots + A_{m-1} \frac{p}{q} + A_m = 0,$$

so hätte man

$$\frac{p^m}{q} = -A_1 p^{m-1} - A_2 p^{m-2} q - \ldots\ldots - A_{m-1} p q^{m-2} - A_m q^{m-1};$$

es wäre also, da p^m durch q ohne Rest nicht getheilt werden kann, ein Bruch einer ganzen Zahl gleich, was ungereimt ist.

Die Wurzeln der Gleichung (1) sind demnach entweder ganze Zahlen, oder mit der Einheit incommensurabel.

Ob die Gleichung (1) ganze Wurzeln, und welche sie zuläßt, wird auf folgende Art erörtert.

Es sey w eine ganze Wurzel der Gleichung (1), so muß, da die Gleichung

$$w^m + A_1 w^{m-1} + A_2 w^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} w + A_m = 0,$$

folglich auch

$$\frac{A_m}{w} = -w^{m-1} - A_1 w^{m-2} - A_2 w^{m-3} - \ldots - A_{m-2} w - A_{m-1}$$

besteht, $\frac{A_m}{w}$ eine ganze Zahl, d. h. w ein Theiler von A_m seyn, was schon aus dem Umstande hätte erschlossen werden können, daß der numerische Werth des letzten Gliedes einer geordneten Gleichung, deren erstes Glied den Coefficienten 1 führt, dem Producte sämmtlicher Wurzeln gleich kommt. Man setze $\frac{A_m}{w} = B_1$, so ergibt sich wieder

$$\frac{B_1 + A_{m-1}}{w} = -w^{m-2} - A_1 w^{m-3} - A_2 w^{m-4} - \ldots - A_{m-3} w - A_{m-2};$$

es muß also auch $\frac{B_1 + A_{m-1}}{w}$ eine ganze Zahl seyn. Bezeichnet man dieselbe durch B_2, so folgt

$$\frac{B_2 + A_{m-2}}{w} = -w^{m-3} - A_1 w^{m-4} - A_2 w^{m-5} - \ldots - A_{m-4} w - A_{m-3};$$

woraus erhellet, daß auch $\frac{B_2 + A_{m-2}}{w}$ eine ganze Zahl seyn muß. Setzt man nun

$$\frac{B_2 + A_{m-2}}{w} = B_3, \quad \frac{B_3 + A_{m-3}}{w} = B_4, \text{ 2c.}$$

$$\frac{B_{m-2} + A_2}{w} = B_{m-1}, \quad \frac{B_{m-1} + A_1}{w} = B_m,$$

so findet man auf dem hier betretenen Wege leicht, daß B_3, B_4, ... B_{m-1}, B_m ganze Zahlen seyn müssen, unter welchen insbesondere $B_m = -1$ ist, so daß die Gleichung $B_m + 1 = 0$ Statt findet.

Man zerlege demnach das letzte Glied A_m der gegebenen Gleichung in seine einfachen Factoren, und bilde aus denselben alle möglichen Divisoren dieses Gliedes. Man stelle die erhaltenen Divisoren, sowohl mit dem Zeichen —, als auch mit dem Zeichen + in eine Reihe zusammen, es wäre denn, daß ein ununterbrochener Zeichenwechsel in der Gleichung auf den Mangel reeller negativer, oder eine ununterbrochene Folge gleicher Zeichen auf den Mangel reeller positiver Wurzeln hindeutete. Unter jeden Divisor schreibe man den Quotienten, welchen das letzte Glied der Gleichung durch ihn getheilt gibt; hierunter setze man die Resultate der Addition jedes Quotienten zu dem Coefficienten im vorletzten Gliede der Gleichung; jede der gefundenen Summen theile man durch den ihr entsprechenden Divisor; die Quotienten vereinige man wieder mit dem Coefficienten des nächsten der Endglieder der Gleichung, und theile die Summen abermal durch die zugehörigen Divisoren, u. s. w. Sobald eine der zu verrichtenden Divisionen nicht auf-

geht, wird der betreffende Divisor nicht weiter berücksichtiget, denn er ist gewiß keine Wurzel der gegebenen Gleichung; kann aber die Operation so lange fortgesetzt werden, bis sämmtliche Coefficienten der Gleichung an die Reihe gekommen sind, und endiget sich dieselbe mit der Summe o, so ist der correspondirende Divisor offenbar eine Wurzel der vorgelegten Gleichung.

Man sieht ohne Mühe ein, daß dasselbe Verfahren zur Prüfung, ob eine ganze Zahl eine Wurzel einer gegebenen Gleichung sey, auch in dem Falle angewendet werden kann, wenn der Coefficient des höchsten Gliedes der Gleichung eine von der Einheit verschiedene ganze Zahl A_0 ist; nur erhält man dann statt $B_m = -1$ die Gleichung $B_m = -A_0$ oder $B_m + A_0 = 0$, als Bedingung der bejahenden Entscheidung der Frage.

Da unter der Voraussetzung, daß w eine Wurzel der Gleichung (1) ist,

$$-B_m = 1,$$
$$-B_{m-1} = -B_m w + A_1 = w + A_1,$$
$$-B_{m-2} = -B_{m-1} w + A_2 = w^2 + A_1 w + A_2,$$
$$-B_{m-3} = -B_{m-2} w + A_3 = w^3 + A_1 w^2 + A_2 w + A_3$$

u. s. w.,

endlich

$$-B_1 = w^{m-1} + A_1 w^{m-2} + A_2 w^{m-3} + \ldots + A_{m-2} w + A_{m-1}$$

gefunden wird, so lehrt die Vergleichung dieser Ergebnisse mit den Formeln der drei und zwanzigsten Vorlesung, daß die Größen

$$-B_{m-1},\ -B_{m-2},\ -B_{m-3},\ -\text{etc.}\ -B_2,\ -B_1$$

die Coefficienten der auf das erste folgenden Glieder im Quotienten darstellen, welchen die Division der Gleichung (1) durch den Wurzelfactor $x - w$ darbietet. In der That ist das so eben auseinandergesetzte Verfahren nichts anderes, als eine versteckte Division des rückwärts geordneten ersten Theiles der vorgelegten Gleichung durch das Binom $-w + x$.

Folgende Bemerkungen werden Mittel an die Hand geben, die oben beschriebene Probe, welche mit den Divisoren des letzten Gliedes einer Gleichung von der Form (1) vorgenommen werden soll, um zu entscheiden, ob einige und welche derselben Wurzeln dieser Gleichung sind, abzukürzen.

Transformirt man die gegebene Gleichung (1) mittelst der Sub-

stitution $x = y + a$ in eine andere, deren Wurzeln sämmtlich um a kleiner sind, als jene der ersteren, so erhält die neue Gleichung, wie in der sieben und zwanzigsten Vorlesung gezeigt wurde, das Resultat zum letzten Gliede, welches der erste Theil der vorgelegten Gleichung darbietet, wenn man daselbst a statt x setzt. Auch hat die transformirte Gleichung, wenn man für a eine ganze Zahl nimmt, die Form der gegebenen (1).

Ist nun das letzte Glied der Gleichung (1) ein Product sehr vieler Factoren, wodurch die Anzahl der zu prüfenden Divisoren ungemein groß ausfällt, und läßt sich ein Werth der ganzen Zahl a ausmitteln, für welchen sich der erste Theil der gegebenen Gleichung auf eine aus weniger Factoren bestehende Zahl reducirt, so bilde man die Divisoren dieser letzteren, addire zu jedem derselben a, und versuche nach der oben erklärten Methode, ob einige der erhaltenen Summen, unter welchen sich nothwendig alle ganzen Wurzeln der gegebenen Gleichung befinden, dieser Gleichung Genüge leisten.

Hat man die Divisoren des letzten Gliedes sowohl der gegebenen Gleichung als auch der durch die Substitution $x = y + a$ transformirten gebildet, so können nur diejenigen der ersteren Divisoren Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn, welche um a vermindert in Divisoren des Endgliedes der transformirten Gleichung übergehen, wodurch die Anzahl der obiger Prüfung zu unterwerfenden Divisoren oft bedeutend verringert wird. In den meisten Fällen reicht es hin $a = +1$ und $a = -1$ zu setzen, wenn diese Zahlen nicht etwa selbst Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind; auch sind die Resultate dieser Substitutionen am leichtesten zu berechnen.

Wir befinden uns also gegenwärtig im Stande die rationalen Wurzeln jeder Gleichung, deren Coefficienten rational sind, aufzufinden. Denn jede solche Gleichung erlangt, nach Wegschaffung der Brüche durch die am Eingange dieser Vorlesung erwähnte Transformation, die Gestalt (1).

Was die mit der Einheit incommensurablen Wurzeln der mit reellen Coefficienten versehenen Gleichungen betrifft, so kann man dieselben durch rationale Zahlen so genau darstellen, als man nur immer will.

Denn da die imaginären Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ dieser Art paarweise an die Formen $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$, in welchen p, q reelle Größen anzeigen, gebunden sind, folglich das Product der hieraus entspringenden Wurzelfactoren

$$[x-(p+q\sqrt{-1})][x-(p-q\sqrt{-1})]=(x-p)^2+q^2$$

nie negativ wird, man mag der Größe x was immer für einen reellen Werth beilegen, so kann das Zeichen des Resultates, welches man erhält, wenn man in dem ersten Theile $f(x)$ der genannten Gleichung statt x eine reelle Zahl setzt, bloß von den Zeichen abhängen, welche die auf reelle Wurzeln sich beziehenden einfachen Factoren des Polynoms $f(x)$ hierbei annehmen. Denkt man sich nun alle Größen so geordnet, daß die größeren negativen vorangehen, die kleineren negativen folgen, und die positiven sich an letztere nach der Ordnung ihres Wachsens anschließen, und man setzt statt x zwei reelle Zahlen α und β, so nimmt in beiden Fällen jeder reelle Wurzelfactor $x-w$ der Gleichung $f(x)=0$ verschiedene oder übereinstimmende Zeichen an, je nachdem die diesem Factor zugehörige Wurzel w zwischen α und β fällt, oder das Gegentheil Statt findet. Hieraus erhellet, daß die Resultate $f(\alpha)$ und $f(\beta)$, welche aus $f(x)$ durch die erwähnten zwei Substitutionen hervorgehen, gleiche oder ungleiche Zeichen besitzen, je nachdem eine gerade oder eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen α und β liegt, und umgekehrt, wobei man aber offenbar die der Gleichung mehrere Male zukommenden Wurzeln eben so vielmal mitzählen muß.

Geben daher zwei reelle Zahlen α und β statt x in der Gleichung $f(x)=0$ substituirt, Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, so ist man berechtiget zu schließen, daß zwischen α und β wenigstens eine reelle Wurzel dieser Gleichung sich befindet. Läßt man das arithmetische Mittel zwischen α und β, nämlich $\frac{\alpha+\beta}{2}$, für einen Näherungswerth der erwähnten Wurzel gelten, so ist der numerische Werth des dabei begangenen Fehlers kleiner als $\frac{\beta-\alpha}{2}$.

Sobald der Unterschied zwischen α und β numerisch betrachtet kleiner ist, als der kleinste der Unterschiede je zweier ungleicher reeller Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so können zwischen α und β nicht mehrere verschiedene Wurzeln dieser Gleichung liegen. Setzt man daher statt x in dem Polynome $f(x)$ die Glieder einer arithmetischen Progression, deren Differenz δ kleiner ist, als der kleinste der Unterschiede je zweier ungleicher reeller Wurzeln der genannten Gleichung, so werden sich bei einem hinreichenden Umfange dieser Progression in der Reihe der erhaltenen Resultate so viele Zeichenabwechslungen darstellen, als der Gleichung $f(x)=0$ unwiederholte reelle Wurzeln entsprechen;

und der Fehler, welchen man begeht, indem man die halbe Summe der Glieder der Progression, auf welche sich eine solche Zeichenabwechslung bezieht, als den Betrag einer Wurzel der Gleichung ansieht, ist kleiner als $\frac{1}{2}\delta$, so daß die Annäherung, wenn man δ klein genug annimmt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bewerkstelliget werden kann. Dasselbe Verfahren gibt auch die angenäherten Werthe jener reellen Wurzeln, welche der Gleichung eine ungerade Anzahl Male zugehören, und nur die eine gerade Anzahl Male wiederholten reellen Wurzeln werden dadurch nicht bestimmt. Wir können uns jedoch vor der Hand immerhin auf die Ausmittelung unwiederholter reeller Wurzeln einer Gleichung beschränken, da wir für die Absonderung der wiederholten Wurzeln von den übrigen besondere Vorschriften ertheilen werden.

Man kann die Berechnung der reellen Wurzeln einer Gleichung, wenn man es bequem findet, auf eine bloße Berechnung positiver Wurzeln reduciren. Denn handelt es sich um die negativen reellen Wurzeln, so transformire man die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ mittelst der Substitution $x = -y$ in eine andere, deren positive Wurzeln, numerisch betrachtet, den negativen Wurzeln der ersteren gleich kommen, und man hat es nunmehr bloß mit positiven Wurzeln zu thun.

Man müßte also, um die so eben besprochene Näherungsmethode auf eine geordnete Gleichung $f(x) = 0$ anzuwenden, in derselben erstlich statt x nach und nach die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ꝛc. setzen, und den Umstand beachten, ob nicht etwa zwei unmittelbar auf einander folgende Substitutionen Resultate mit entgegengesetzten Zeichen darbieten. Ist dieß bei den Werthen $x = a$ und $x = a + 1$ der Fall, so hat man $x = a + 0{\cdot}5$ als einen ersten auf $0{\cdot}5$ genauen Näherungswerth einer Wurzel der Gleichung. Die Substitution $x = a + 0{\cdot}5$ wird lehren, ob der wahre Werth dieser Wurzel zwischen a und $a + 0{\cdot}5$, oder zwischen $a + 0{\cdot}5$ und $a + 1$ fällt. Nun setze man, zum Behufe neuer Substitutionen für x, der kleineren der beiden Grenzen stufenweise $0{\cdot}1$, $0{\cdot}2$, $0{\cdot}3$, $0{\cdot}4$ zu, und berechne die Resultate, welche der erste Theil der Gleichung dafür gibt. Sobald wieder ein Zeichenwechsel in diesen Resultaten Statt findet, hat man einen Näherungswerth der fraglichen Wurzel, welcher sich von ihr um weniger als $0{\cdot}05$ entfernt. Auf dieselbe Weise kann man die Annäherung bis auf $0{\cdot}005$, $0{\cdot}0005$ u. s. w., und überhaupt so weit treiben, als man will. Zeigt sich aber in den Resultaten für die Substitutionen $x = 0, 1, 2, 3,$

4, zc. keine Zeichenabwechslung, so können zwischen zwei Nachbargliedern der Reihe der für x angenommenen Werthe allerdings reelle Wurzeln in gerader Anzahl vorhanden seyn. Oft geben sich die Stellen, wo dieß der Fall seyn dürfte, durch einen Übergang der correspondirenden Resultate aus dem Zustande des Wachsens in jenen des Abnehmens, und umgekehrt, zu erkennen, obschon diese Erscheinung auch von den reellen Theilen der imaginären Wurzeln herrühren kann. Dann müßte man die Differenz der Progression der Zahlen, welche man statt x zu setzen hat, so lange verkleinern, bis man seinen Zweck erreicht.

So einfach die hier beschriebene Näherungsmethode scheint, so wenig ist sie in der wirklichen Anwendung, der vielen Substitutionen wegen, welche sie fordert, brauchbar. Wie man die Arbeit verringern kann, werden wir in den nächsten Vorlesungen vortragen.

Drei und dreißigste Vorlesung.

Über die Auflösung numerischer Gleichungen.

(Fortsetzung.)

Ehe wir uns mit einer zweckmäßigeren Einrichtung der in der vorhergehenden Vorlesung entworfenen Näherungsmethode zur Bestimmung der incommensurablen Wurzeln einer vorgelegten Gleichung mit einer unbekannten Größe beschäftigen, wollen wir sichere Kennzeichen der Anwesenheit wiederholter Wurzeln aufstellen, und zeigen, wie dieselben, wenn sie vorhanden sind, beseitiget werden können. Hiedurch erlangen wir den doppelten Vortheil, sowohl die Hindernisse zu entfernen, welche wiederholte reelle Wurzeln einer Gleichung der zuverläßigen Erkenntniß sämmtlicher reeller Wurzeln derselben entgegenstellen, als auch die Auflösung dieser Gleichung selbst auf die Behandlung mehrerer Gleichungen von niedrigeren Graden zurückzuführen.

Sind $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_m$ sämmtliche reelle und imaginäre Wurzeln der Gleichung

$$(1)\qquad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

und ist

$$(2)\quad x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + B_3 x^{m-4} + \ldots + B_{m-2} x + B_{m-1} = 0$$

der Quotient, welchen die Gleichung (1) durch den Wurzelfactor $x - x_1$ getheilt gibt, so gehören der Gleichung (2) die $m-1$ Wurzeln $x_2, x_3, \ldots . x_m$.

Setzt man in der Gleichung (2) x_1 statt x, und berücksichtiget man, so wie es in der acht und zwanzigsten Vorlesung geschehen ist, die Werthe von $B_1, B_2, B_3 \ldots B_{m-1}$, so geht der erste Theil der genannten Gleichung in

$$(3)\quad m x_1^{m-1} + (m-1) A_1 x_1^{m-2} + (m-2) A_2 x_1^{m-3} + (m-3) A_3 x_1^{m-4} + \ldots + A_{m-1}$$

über. Ist x_1 eine Wurzel der Gleichung (1), welche ihr öfter als ein Mal gehört, welche also einer oder mehreren der Wurzeln $x_2, x_3, x_4 \ldots x_m$ gleich kommt, so muß sich das Polynom (3) nothwendig auf 0 reduciren; und umgekehrt, verschwindet das Polynom (3), so ist x_1 eine wiederholte Wurzel der Gleichung (1).

Bildet man also aus dem ersten Theile der Gleichung (1), nämlich aus $f(x)$, die Function

$$f_1(x) = mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1},$$

welche man erhält, wenn man jedes Glied in $f(x)$ mit dem zugehörigen Exponenten der Unbekannten x multiplicirt, und dann diesen Exponenten um die Einheit verringert, so haben die Gleichungen $f(x) = 0$ und $f_1(x) = 0$ gewiß so viele gemeinschaftliche Wurzeln, als sich in $f(x) = 0$ verschiedene wiederholte Wurzeln vorfinden, und das Stattfinden eines gemeinschaftlichen von x abhängenden Divisors der Polynome $f(x)$ und $f_1(x)$, worüber sich nach dem aus der Arithmetik bekannten Verfahren leicht entscheiden läßt, ist ein sicheres Kennzeichen, daß der Gleichung (1), nämlich $f(x) = 0$, wiederholte Wurzeln entsprechen. Sucht man nun den größten gemeinschaftlichen Theiler der Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$, und setzt man denselben $= 0$, so sind alle Wurzeln dieses Theilers wiederholte Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Es sey x_1 bereits als eine rfache Wurzel der Gleichung (1) anerkannt, folglich diese Gleichung durch $(x - x_1)^r$ ohne Rest theilbar. Der betreffende Quotient sey

$$(4)\quad x^{m-r} + C_1x^{m-r-1} + C_2x^{m-r-2} + \ldots + C_{m-r-1}x + C_{m-r} = 0,$$

so erhält man, wenn man in dem ersten Theile desselben x_1 statt x setzt und die Coefficienten $C_1, C_2, C_3 \ldots C_{m-r}$ auf dieselbe Weise wie in der acht und zwanzigsten Vorlesung durch $A_1, A_2, A_3 \ldots$ ausdrückt, das Polynom

$$(5)\quad \frac{1}{1.2.3.\ldots r}\Big[m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)x_1^{m-r}$$
$$+ (m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-r)A_1x_1^{m-r-1}$$
$$+ (m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-r-1)A_2x_1^{m-r-2} + \ldots$$
$$\ldots + r(r-1)(r-2)\ldots 3.2.1.A_{m-r}\Big].$$

Ist x_1 nicht bloß eine rfache Wurzel der Gleichung (1), sondern gehört diese Wurzel der genannten Gleichung noch öfter, so wird das Polynom (5) gleich Null, und umgekehrt; verschwindet letzteres Polynom, so ist x_1 wenigstens eine $(r+1)$fache Wurzel der Gleichung (1).

Man bezeichne die Function

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)x^{m-r}$$
$$+ (m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-r)A_1x^{m-r-1}$$
$$+ (m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-r-1)A_2x^{m-r-2} + \ldots$$
$$\ldots + r(r-1)(r-2)\ldots 3.2.1\,A_{m-r}$$

durch $f_r(x)$, welche Bezeichnung die oben gewählte $f_1(x)$ als einen speciellen Fall in sich schließt, und der zu Folge insbesondere

$$f_2(x) = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + (m-2)(m-3)A_2x^{m-4} + \ldots \ldots + 2.1.A_{m-2}$$

$$f_3(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)A_1x^{m-4} + (m-2)(m-3)(m-4)A_2x^{m-5} + \ldots \ldots + 3.2.1\,A_{m-3}$$

u. s. w.

ist, so gelangt man mit Hülfe der oben gemachten Bemerkungen zu folgenden Resultaten:

Kömmt die Wurzel x_1 der Gleichung $f(x) = 0$ öfter als ein Mal zu, so muß nebst $f(x_1)$ auch $f_1(x_1)$ verschwinden. Wird das Polynom $f_2(x)$ durch die Substitution $x = x_1$ nicht zugleich auf Null gebracht, so ist x_1 bloß eine zweifache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$; findet man aber auch $f_2(x_1) = 0$, so muß x_1 wenigstens eine dreifache Wurzel der genannten Gleichung seyn, und sie gehört derselben nicht öfter, wenn $f_3(x_1)$ von 0 verschieden ausfällt. Besteht überdieß noch die Gleichung $f_3(x_1) = 0$, so ist x_1 wenigstens eine vierfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, u. s w. Überhaupt, soll x_1 genau eine $r$fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ seyn, so müssen die Polynome $f(x_1)$, $f_1(x_1)$, $f_2(x_1)$, $f_3(x_1)$, ... $f_{r-1}(x_1)$ verschwinden; $f_r(x_1)$ hingegen muß von 0 verschieden seyn.

Da jede folgende der Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, 2c. $f_{r-1}(x)$ aus der vorhergehenden und überhaupt von je zwei Paaren in dieser Reihe gleich weit von einander abstehender Functionen die spätere aus der früheren nach demselben Gesetze hervorgeht, so sieht man, daß jede $r$fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ eine $(r-1)$fache der Gleichung $f_1(x) = 0$, eine $(r-2)$fache der Gleichung $f_2(x) = 0$ u. s. w. seyn muß. Sucht man nun den größten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi_1(x)$ für $f(x)$ und $f_1(x)$, ferner den größten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi_2(x)$ für $\varphi_1(x)$ und $f_2(x)$, dann den größten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi_3(x)$ für $\varphi_2(x)$ und $f_3(x)$ u. s. w., so lange sich noch solche Theiler, die Functionen von x sind, vorfinden, und lassen wir $\varphi_{r-1}(x)$ den letzten derselben seyn, welcher zu $\varphi_{r-2}(x)$ und $f_{r-1}(x)$ gehört: so kommen der Gleichung $f(x) = 0$ keine öfter wiederholten Wurzeln, als $r$fache zu. Die Gleichung $\varphi_{r-1}(x) = 0$, gehörig aufgelöst, bietet alle $r$fachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und zwar jede nur ein Mal dar;

der Gleichung $\varphi_{r-2}(x) = 0$ entsprechen alle rfachen und $(r-1)$fachen Wurzeln der gegebenen Gleichung, erstere zwei Mal, letztere nur ein Mal; es ist daher $\varphi_{r-2}(x)$ durch die zweite Potenz von $\varphi_{r-1}(x)$ theilbar, und der Quotient gleich Null gesetzt verhilft zu den $(r-1)$fachen Wurzeln selbst, u. s. w.

Indessen genügt die Betrachtung der Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$, um alle wiederholten Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, jede Gattung für sich, in einer abgesonderten Gleichung, darzustellen. Es sey nämlich $\psi_1(x)$ das Product aller Wurzelfactoren, welche der Gleichung $f(x) = 0$ nur ein Mal zukommen; ferner seyen $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ u. s. w. die Producte aller zweifachen, dreifachen, vierfachen Wurzelfactoren dieser Gleichung, wobei aber jeder dieser Factoren nur ein Mal gesetzt worden ist, so haben wir offenbar

$$f(x) = \psi_1(x) \cdot [\psi_2(x)]^2 \cdot [\psi_3(x)]^3 \cdot [\psi_4(x)]^4 \cdot [\psi_5(x)]^5 \text{ ꝛc.}$$

Der größte den Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ gemeinschaftliche Theiler $\varphi_1(x)$ wird, dem oben Gesagten gemäß, durch das Product

$$\psi_2(x) \cdot [\psi_3(x)]^2 \cdot [\psi_4(x)]^3 \cdot [\psi_5(x)]^4 \text{ ꝛc.}$$

ausgedrückt, daher ist der Quotient

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$ welchen wir der Kürze wegen durch $\Phi_1(x)$ anzeigen wollen,

$$= \psi_1(x) \cdot \psi_2(x) \cdot \psi_3(x) \cdot \psi_4(x) \cdot \psi_5(x) \ldots\ldots$$

Setzen wir diesen Quotienten $= 0$, und lösen wir die hiedurch gebildete Gleichung auf, so erhalten wir alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, worunter aber jede wiederholte nur ein Mal erscheint. Die Behandlung der Gleichung $\Phi_1(x) = 0$, nach der in der vorhergehenden Vorlesung beschriebenen Näherungsmethode, ist den Schwierigkeiten nicht unterworfen, welche wiederholte Wurzeln verursachen können.

Bezeichnen wir den größten gemeinschaftlichen Theiler von $\varphi_1(x)$ und $\Phi_1(x)$ durch $\varphi_2(x)$, wobei natürlich $\varphi_2(x)$ nicht mehr dieselbe Bedeutung hat, wie oben, so ist

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) \cdot \psi_3(x) \cdot \psi_4(x) \cdot \psi_5(x) \ldots\ldots$$

und $$\frac{\Phi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \psi_1(x).$$

Die Auflösung der Gleichung $\psi_1(x) = 0$, welche jetzt abgesondert dargestellt werden kann, führt zu allen der Gleichung $f(x) = 0$ nur ein Mal gehörenden Wurzeln.

Setzen wir $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \Phi_2(x)$, so haben wir

$$\Phi_2(x) = \psi_3(x) \cdot [\psi_4(x)]^2 \cdot [\psi_5(x)]^3 \ldots\ldots;$$

und wenn wir zu $\varphi_2(x)$ und $\Phi_2(x)$ den größten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi_3(x)$ suchen:

$$\varphi_3(x) = \psi_3(x) \cdot \psi_4(x) \cdot \psi_5(x) \ldots\ldots$$

Da nun $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = \psi_2(x)$ ist, so besitzen wir die Gleichung $\psi_2(x) = 0$ abgesondert, und sind daher im Stande, die zweifachen Wurzeln der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ auszumitteln.

Es sey ferner $\frac{\Phi_2(x)}{\varphi_3(x)} = \Phi_3(x)$, so ist

$$\Phi_3(x) = \psi_4(x) [\psi_5(x)]^2 [\psi_6(x)]^3 \ldots\ldots$$

Hieraus erhellet die Beschaffenheit des größten gemeinschaftlichen Theilers der Functionen $\varphi_3(x)$ und $\Phi_3(x)$. Er ist

$$\varphi_4(x) = \psi_4(x) \cdot \psi_5(x) \cdot \psi_6(x) \ldots\ldots,$$

so, daß man mittelst des Quotienten $\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)} = \psi_3(x)$ sogleich die dreifachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ anzugeben vermag.

Wie diese Operation weiter fortzusetzen ist, wird durch den bisherigen Gang derselben hinreichend angedeutet. Sie endiget sich, sobald einer der aufzusuchenden größten gemeinschaftlichen Divisoren von x unabhängig erscheint.

Bei dem Gebrauche der in der vorhergehenden Vorlesung entworfenen Methode zur näherungsweisen Bestimmung der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung ist die Kenntniß der Grenzen, innerhalb welcher sich diese Wurzeln befinden, von hoher Wichtigkeit, da sie vieler unnützer Substitutionen zur Erforschung der Zeichen des ersten Theiles der Gleichung überhebt, und der hieraus erwachsende Vortheil ist um so größer, je genauer diese Grenzen bestimmt sind, d. h. je weniger das zwischen ihnen liegende Intervall beträgt.

Wir haben bereits bemerkt, daß es sich zunächst bloß um die Berechnung der reellen positiven Wurzeln der Gleichungen handelt, da die Berechnung der negativen Wurzeln leicht in eine Bestimmung positiver Größen umgestaltet werden kann. Daher wollen wir hier nur lehren, zwei Zahlen zu finden, wovon die eine größer ist als die größte, und die andere kleiner als die kleinste positive Wurzel einer gegebenen Glei-

chung, ohne jedoch die erstere Zahl überflüssig groß, und die andere überflüssig klein zu erhalten.

Man verwandle die gegebene Gleichung, deren unbekannte Größe x ist, durch die Substitution $x = y + a$, wobei a eine noch unbestimmte positive Größe anzeigt, in eine andere Gleichung mit der Unbekannten y, deren Wurzeln wegen $x = y - a$ aus jenen der ersteren hervorgehen, wenn man von jeder derselben die Größe a subtrahirt. Wählt man nun den Werth von a dergestalt, daß alle Coefficienten in der transformirten Gleichung positiv ausfallen, was bald erreicht wird, wenn man mit den einfacheren Coefficienten, so wie sie sich nach den Formeln der sieben und zwanzigsten Vorlesung I. ergeben, anfängt, und den bereits bestimmten Werth von a, wenn es nöthig ist, so lange erhöht, bis auch die zusammengesetzteren Coefficienten positive Werthe erhalten; so entspricht der transformirten Gleichung keine reelle positive Wurzel: es ist demnach a größer angenommen worden, als jede der reellen positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Setzt man ferner in der gegebenen Gleichung $x = \frac{1}{z}$, so erhält man eine transformirte Gleichung, deren größte Wurzel der reciproke Werth der kleinsten Wurzel der ersteren Gleichung ist. Sucht man nun auf die so eben erklärte Art eine Zahl b, welche größer ist als die größte positive Wurzel der transformirten Gleichung, so ist der reciproke Werth $\frac{1}{b}$ dieser Zahl kleiner, als die kleinste positive Wurzel der gegebenen Gleichung.

Will man sich mit einer, meistens minder genauen, aber schnell zu findenden Grenze der größten positiven reellen Wurzeln begnügen, so setze man für dieselbe den Ausdruck $1 + \sqrt[r]{G}$, in welchem r die Anzahl der Glieder bedeutet, welche dem ersten negativen Gliede in der gehörig geordneten Gleichung vorangehen, und G den numerischen Werth des größten negativen Coefficienten unter der Voraussetzung anzeigt, daß die höchste Potenz der Unbekannten den Coefficienten 1 führt. Obschon man sich von der Richtigkeit dieser Grenze auf dem in der zweiten Vorlesung 9) angedeuteten Wege leicht überzeugt, so wird es doch nicht unnütz seyn, dieselbe direct abzuleiten.

Es sey nämlich $x^m + \ldots - A_r x^{m-r} \pm \ldots \pm A_m = 0$ die gegebene Gleichung, in welcher $- A_r x^{m-r}$ das erste negative Glied vorstellt, so gibt der erste Theil dieser Gleichung für alle jene positiven

Werthe von x ein positives Resultat, für welche

$$x^m > Gx^{m-r} + Gx^{m-r-1} + Gx^{m-r-2} + \ldots + Gx + G$$

wird, vorausgesetzt, daß G der numerische Betrag des größten daselbst erscheinenden negativen Coefficienten, oder eine noch größere Zahl ist.

Die so eben ausgesprochene Bedingung, welche sich auch auf die Form

$$x^m > G\left(\frac{x^{m-r+1} - 1}{x - 1}\right)$$

bringen läßt, wird erfüllt, wenn man $x > 1$, und so wählt, daß $x^m > \frac{Gx^{m-r+1}}{x-1}$ oder $x^{r-1} > \frac{G}{x-1}$ ausfällt; und dieß erreicht man, wenn man $(x-1)^{r-1} > \frac{G}{x-1}$ oder $(x-1)^r > G$, d. h. wenn man $x > 1 + \sqrt[r]{G}$ annimmt.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch bemerken, daß wenn man aus einer Gleichung

$$(6) \quad x^m \pm A_1 x^{m-1} \pm A_2 x^{m-2} \pm \ldots \pm A_{m-1} x \pm A_m = 0,$$

in welcher die reellen Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots . A_m$ was immer für Zeichen besitzen, eine andere

$$(7) \quad x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x - A_m = 0$$

bildet, in welcher die Coefficienten aller Glieder, vom zweiten angefangen, dieselben numerischen Werthe wie in (6) haben, jedoch mit dem Zeichen — versehen sind, und man eine Zahl k gefunden hat, welche die einzige der Gleichung (7) entsprechende reelle positive Wurzel übersteigt, oder was dasselbe ist, für welche das erste Glied der Gleichung (7) größer wird als die Summe aller übrigen, diese Zahl k in numerischer Beziehung nicht nur allein größer ist, als jede positive oder negative reelle Wurzel der Gleichung (6), sondern auch, wenn $p + q\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel der Gleichung (6) anzeigt, größer als $\sqrt{p^2 + q^2}$. Der erste Theil dieser Behauptung ist für sich klar; was den letzteren betrifft, so haben wir, wenn wir wie in der vier und zwanzigsten Vorlesung

$$p + q\sqrt{-1} = R\,(\cos.\theta + \sqrt{-1}\,\sin.\theta)$$

setzen, und diese Größe in (6) substituiren, die Gleichungen

$$R^m \cos. m\theta \pm A_1 R^{m-1} \cos.(m-1)\theta \pm A_2 R^{m-2} \cos.(m-2)\theta \pm \text{etc.} = 0$$

und

$$R^m \sin. m\theta \pm A_1 R^{m-1} \sin.(m-1)\theta \pm A_2 R^{m-2} \sin.(m-2)\theta \pm \text{etc.} = 0,$$

aus welchen nach verrichteter Multiplication der ersten mit $\cos. m\theta$, und der zweiten mit $\sin. m\theta$, durch Addition der erhaltenen Producte

$$(8) \quad R^m \pm A_1 R^{m-1} \cos. \theta \pm A_2 R^{m-2} \cos. 2\theta \pm \text{etc.} \ldots\ldots = 0$$

folgt.

Der erste Theil der Gleichung (8) gibt für $R > k$ um so mehr ein positives Resultat, wenn dieß schon bei der Gleichung (7) der Fall ist; es muß also $R < k$ seyn. Aber bekannter Maßen ist $R = \sqrt{p^2 + q^2}$, daher muß $\sqrt{p^2 + q^2} < k$ seyn.

Vier und dreißigste Vorlesung.

Über die Auflösung numerischer Gleichungen.

(Fortsetzung.)

Wenn man in dem ersten Theile $f(x)$ einer geordneten und von wiederholten Wurzeln freien Gleichung

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

statt der unbekannten Größe x die Glieder einer arithmetischen Progression

$$\alpha, \quad \alpha+\delta, \quad \alpha+2\delta, \quad \alpha+3\delta, \ldots \ldots \beta$$

setzt, so erscheinen in der Reihe der Resultate

$$f(\alpha), \quad f(\alpha+\delta), \quad f(\alpha+2\delta), \quad f(\alpha+3\delta), \ldots . f(\beta)$$

nur dann genau so viele Abwechslungen der Zeichen, als reelle Wurzeln zwischen dem ersten Gliede α und dem letzten β dieser Progression liegen, wenn die Differenz δ den kleinsten der Unterschiede zwischen je zweien dieser Wurzeln nicht übersteigt. Es ist demnach nöthig, eine Grenze zu kennen, unter welche der numerische Werth der mit Rücksicht auf die Vorzeichen bestimmten Differenz je zweier reeller Wurzeln einer vorgelegten Gleichung nicht herabfällt.

Bildet man aus der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ eine andere $F(y)=0$, deren Wurzeln die Quadrate der Unterschiede je zweier Wurzeln der ersteren sind (sieben und zwanzigste Vorlesung, V.), und sucht man auf die in der vorhergehenden Vorlesung beschriebene Weise eine Zahl μ, welche kleiner ist als jede positive reelle Wurzel der Gleichung $F(y)=0$, so erfüllt die Zahl $\sqrt{\mu}$, oder jede andere noch kleinere, offenbar die gemachte Forderung.

Läßt man daher in obiger Progression $\delta =$ oder $< \sqrt{\mu}$ seyn, und wählt man α und β dergestalt, daß entweder alle reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung, oder nur Wurzeln von einer bestimmten Beschaffenheit, z. B. alle reellen positiven Wurzeln zwischen α und β fallen; so erlangt man nicht nur allein eine genaue Kenntniß der Anzahl derselben, sondern man ist auch im Stande jeder einzelnen dieser Wurzeln so nahe zu kommen, als man nur immer will.

Findet man es zweckmäßig die Rechnung mit irrationalen Zahlen zu vermeiden, so suche man für δ eine rationale Zahl $\frac{\lambda}{\rho} < \sqrt{\mu}$.

Sind α und die Coefficienten der aufzulösenden Gleichung ganze Zahlen, und wünscht man bloß mit ganzen Zahlen zu rechnen, so setze man $x = \frac{z}{\rho}$. Hiedurch erhält man eine transformirte Gleichung mit der Unbekannten z, deren Wurzeln die ρfachen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, so daß für die neue Gleichung $\rho\alpha$ und $\rho\delta$ an die Stelle von α und δ treten, und die Differenz der statt z nach und nach zu substituirenden Zahlen $= \lambda$ wird.

Die Gleichung $F(y) = o$, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen je zweier Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$ sind, gibt überdieß hinsichtlich der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$ manche Aufschlüsse. Kommen unter den Wurzeln dieser letzteren Gleichung einige wiederholte vor, so gehört der transformirten Gleichung $F(y) = o$ die Wurzel o so oft, als sich diese wiederholten Wurzeln zu zweien combiniren lassen, und deßhalb muß sich das Polynom $F(y)$ eben so oft durch $y - o = y$ theilen lassen. Erscheinen ferner in der Gleichung $F(y) = o$ Zeichenfolgen, so sind nicht alle Werthe von y positiv, folglich auch nicht alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$ reell, denn die Quadrate der Differenzen reeller Größen sind nothwendig positiv. Die transformirte Gleichung $F(y) = o$ dient also auch dazu, die Anwesenheit gleicher und imaginärer Wurzeln in der gegebenen Gleichung $f(x) = o$ zu entdecken.

Indessen können wir nicht unterlassen zu bemerken, daß die Berechnung der Coefficienten der Gleichung $F(y) = o$ aus jenen der gegebenen Gleichung, selbst wenn man sich der für diesen besonderen Fall in der sieben und zwanzigsten Vorlesung V. entworfenen Formeln bedient, äußerst beschwerlich wird, sobald der Grad der gegebenen Gleichung nicht sehr niedrig ist. Denn gehört die gegebene Gleichung zur m^{ten} Ordnung, so wird der Ordnungsexponent der zu suchenden $= \frac{m(m-1)}{2}$, und ehe man die $\frac{m(m-1)}{2}$ Coefficienten derselben erhält, muß man $m(m-1)$ der am angeführten Orte mit S, und aus diesen $\frac{m(m-1)}{2}$ der mit Σ bezeichneten Hülfsgrößen berechnen. Es wäre daher immerhin erwünschlich, eine Zahl angeben zu können, welche kleiner ist als jede der Differenzen je zweier Wurzeln einer vorgelegten Gleichung, ohne jedoch bemüssiget zu seyn, die Gleichung zu entwickeln,

welcher diese Differenzen, oder vielmehr ihre Quadrate, als Wurzeln zum Grunde liegen.

Man kann sich zu diesem Zwecke mit dem letzten Gliede der erwähnten transformirten Gleichung auf folgende Art behelfen. Der numerische Werth dieses Gliedes ist, wenn wir die Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ mit $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ bezeichnen:

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \dots \dots (x_{m-1} - x_m)^2.$$

Dieses Product stellt eine symmetrische Function der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ dar, und kann deßhalb aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung unmittelbar nach der in der fünf und zwanzigsten Vorlesung vorgetragenen Methode berechnet werden. Nennen wir das Resultat dieser Berechnung Q. Am Schlusse der vorhergehenden Vorlesung ist gezeigt worden, wie sich eine Grenze k finden läßt, welche nicht nur allein den numerischen Werth jeder reellen Wurzel einer gegebenen Gleichung, sondern wenn $p + q\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel derselben vorstellt, auch die Größe $\sqrt{p^2 + q^2}$ übertrifft. Die Zahl 2k wird demnach offenbar größer seyn, als der numerische Werth der Differenz jeder zweier reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung. Geben ferner zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung eine imaginäre Differenz $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, so sind immer zwei Wurzeln vorhanden, deren Differenz $\lambda - \mu\sqrt{-1}$ ist; und das Quadrat der Zahl 2k übertrifft auch das Product $\lambda^2 + \mu^2$ je zweier solcher zusammengehöriger Differenzen.

Man kann nämlich $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ als die Differenz von $p + q\sqrt{-1}$ und $r + s\sqrt{-1}$, und $\lambda - \mu\sqrt{-1}$ als die Differenz von $p - q\sqrt{-1}$ und $r - s\sqrt{-1}$ betrachten. Unter dieser Annahme ist

$$\lambda^2 + \mu^2 = (p - r)^2 + (q - s)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2pr - 2qs,$$

folglich $\lambda^2 + \mu^2 < p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{r^2 + s^2}$

oder $\lambda^2 + \mu^2 < (\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{r^2 + s^2})^2$.

Allein es ist sowohl $\sqrt{p^2 + q^2}$, als auch $\sqrt{r^2 + s^2}$ kleiner als k, daher $\lambda^2 + \mu^2 < (2k)^2$.

Dieselbe Folgerung erstreckt sich auch auf den Fall, wenn eine der beiden Wurzeln, deren Differenz genommen wird, reell ist, oder wenn sich entweder die reellen oder die imaginären Bestandtheile der von einander zu subtrahirenden Wurzeln aufheben.

Aus dem Gesagten folgt, daß wenn D die Differenz zweier beliebiger reeller Wurzeln der gegebenen Gleichung bezeichnet,

$$D^2 \cdot (2k)^{m(m-1)-2} > Q$$

$$\text{oder} \quad D > \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}$$

seyn muß; es also, sobald nach einer Zahl δ gefragt wird, welche kleiner seyn soll als D, vollkommen hinreicht

$$\delta = \text{oder} < \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}$$

anzunehmen.

Die Berechnung des Werthes von Q dürfte immer noch sehr beschwerlich seyn. Da man es aber in den meisten Fällen mit Gleichungen zu thun hat, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, oder doch durch Transformation sich auf solche bringen lassen, und Q seiner Zusammensetzung nach mittelst der bekannten Formeln dann nothwendig ebenfalls eine ganze Zahl ist, die, sobald die gegebene Gleichung keine wiederholten Wurzeln enthält, niemals verschwindet, so kann man unter diesen Voraussetzungen

$$\delta = \text{oder} < \frac{1}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}$$

nehmen, und die Berechnung von Q gänzlich bei Seite setzen. Freilich fällt hiebei, wenn Q eine große Zahl ist, der Werth von δ viel zu klein aus, und deßhalb wird diese Bestimmung von δ oft sehr unvollkommen seyn.

Die Bequemlichkeit der Rechnung fordert noch, daß man im Stande sey aus einem bereits erhaltenen Näherungswerthe für eine reelle Wurzel einer gegebenen Gleichung, einen genaueren Näherungswerth zu finden, ohne gerade wegen jeder einzelnen Decimalstelle die in der zwei und dreißigsten Vorlesung angedeuteten Substitutionen mehrerer Glieder einer arithmetischen Reihe statt der unbekannten Größe vornehmen zu müssen.

Folgendes von Newton angegebene Verfahren ist hiezu in vielen Fällen dienlich.

Es sey

$$(1) \quad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

die gegebene Gleichung; die Zahl a drücke eine Wurzel x_1 derselben

mit einer gewissen Genauigkeit aus, so daß der Unterschied y zwischen a und dieser Wurzel weniger beträgt als ω, wobei ω eine gegebene Größe anzeigt. Setzt man nun $x = a + y$, so erhält man zur Bestimmung von y folgende Gleichung:

(2) $$f(a+y) =$$
$$= f(a) + f_1(a) \cdot y + \frac{1}{1.2} f_2(a) \cdot y^2 + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) \cdot y^3 + \text{ꝛc.} + y^m = 0;$$

wenn man nämlich in den Formeln der sieben und zwanzigsten Vorlesung I. die Buchstaben V_0, V_1, V_2, V_3, ꝛc. mit den in der vorhergehenden Vorlesung gebrauchten Zeichen vertauscht. Die m Wurzeln dieser neuen Gleichung sind die m Unterschiede, welche sich ergeben, wenn man die Zahl a von jeder der m Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ subtrahirt. Kommt nun a der Wurzel x_1 näher als jeder anderen, und ist $\omega < 1$, folglich um so mehr $y < 1$, so bilden die Potenzen y, y^2, y^3, .. y^m eine abnehmende Reihe, und man kann näherungsweise

$$f(a) + f_1(a) \cdot y = 0,$$

also $y = -\frac{f(a)}{f_1(a)}$ und $x_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)}$ annehmen.

Es sey nun wieder $a_1 = a - \frac{f(a)}{f_1(a)}$

und $x_1 = a_1 + y_1$,

so erhält man für die Correction y_1 auf dieselbe Weise den genäherten Ausdruck $$y_1 = -\frac{f(a_1)}{f_1(a_1)},$$ und man kann

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(a_1)}$$

als einen neuen Näherungswerth für x_1 betrachten, aus welchem sich gleichfalls ein folgender

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f_1(a_2)}$$

ableiten läßt, u. s. w., so daß allgemein $a_{r+1} = a_r - \frac{f(a_r)}{f_1(a_r)}$ ist.

Oder auch, man setze näherungsweise für irgend einen schon gefundenen Näherungswerth a_r

$$f(a_r) + f_1(a_r) y_r + \tfrac{1}{2} f_2(a_r) \cdot y_r^2 = 0$$

und $$y_r = -\frac{f(a_r)}{f_1(a_r) + \tfrac{1}{2} f_2(a_r) \cdot y_r}.$$

Nimmt man nun für die Correction y_r im Nenner dieses Bruches ihren nächstvorhergehenden Werth $y_{r-1} = -\frac{f(a_{r-1})}{f_1(a_{r-1})}$, so hat man

$$a_{r+1} = a_r - \frac{f(a_r)}{f_1(a_r) - \frac{f(a_{r-1}) \cdot f_2(a_r)}{2 f_1(a_{r-1})}}.$$

Damit jedes folgende Glied der Reihe $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$, 2c. dem wahren Werthe der Wurzel x_1 näher komme, als das nächstvorhergehende, müssen die Correctionen $y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_r$, 2c. eine abnehmende Reihe darstellen. Es ist daher vor Allem zu untersuchen, ob dieß jederzeit der Fall seyn werde, d. h. ob für jedes Glied aus der Reihe der a, ohne Rücksicht auf die Zeichen,

$$x_1 - (a+y) < x_1 - a$$

erfolgen müsse.

Da $x_1 - a$, $x_2 - a$, $x_3 - a$, ... $x_m - a$ die m Wurzeln der Gleichung (2), nämlich $f(a+y) = 0$ sind, und das letzte Glied jeder Gleichung das Product aller mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln; der Coefficient des vorletzten Gliedes aber die Summe der Producte ist, welche man erhält, wenn man, so oft es angeht, alle Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen, eine ausgenommen, mit einander multiplicirt: so haben wir

$$f(a) = (a-x_1)(a-x_2)(a-x_3) \ldots (a-x_m) \text{ und}$$

$$\begin{aligned} f_1(a) = &(a-x_2)(a-x_3)\ldots(a-x_m) + (a-x_1)(a-x_3)\ldots(a-x_m) \\ &+ (a-x_1)(a-x_2)(a-x_4)\ldots(a-x_m) + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots + (a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_{m-1}), \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{f_1(a)}{f(a)} = \frac{1}{a-x_1} + \frac{1}{a-x_2} + \frac{1}{a-x_3} + \ldots + \frac{1}{a-x_m} \text{ und}$$

$$y = -\frac{f(a)}{f_1(a)} = \frac{1}{\frac{1}{x_1-a} + \frac{1}{x_2-a} + \frac{1}{x_3-a} + \ldots + \frac{1}{x_m-a}}.$$

Lassen wir der Kürze wegen $\frac{1}{x_2-a} + \frac{1}{x_3-a} + \ldots + \frac{1}{x_m-a} = R$ seyn, so wird $y = \frac{1}{\frac{1}{x_1-a} + R}$, also

$$x_1 - (a+y) = x_1 - a - \frac{1}{\frac{1}{x_1-a} + R} = \frac{R(x_1-a)}{\frac{1}{x_1-a} + R}.$$

Statt zu untersuchen, ob $x_1 - (a + y)$ dem numerischen Werthe nach kleiner als $x_1 - a$ ist, wollen wir auf die mit der vorigen identische Beziehung

$$\frac{1}{x_1 - (a + y)} > \frac{1}{x_1 - a}$$

sehen. Wir haben dem so eben gefundenen Ausdrucke gemäß

$$\frac{1}{x_1 - (a + y)} = \frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{(x_1 - a)^2 R}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß, so oft R und $x_1 - a$ einerlei Zeichen haben, der numerische Werth von $\frac{1}{x_1 - (a + y)}$ wirklich größer ist als jener von $\frac{1}{x_1 - a}$; denn $(x_1 - a)^2$ ist, da wir x_1 reell annehmen, nothwendig positiv, folglich das Zeichen des Bruches $\frac{1}{(x_1 - a)^2 R}$ bloß von dem Zeichen der Größe R abhängig.

Haben hingegen die Größen $x_1 - a$ und R verschiedene Zeichen, so kann der numerische Werth von $\frac{1}{x_1 - (a + y)}$ nur dann größer ausfallen als jener von $\frac{1}{x_1 - a}$, wenn $\frac{1}{x_1 - a}$ numerisch betrachtet kleiner ist als die Hälfte von $\frac{1}{(x_1 - a)^2 R}$, oder was dasselbe ist, wenn $2(x_1 - a)R + 1$ einen positiven Werth besitzt.

Da die Größe R bloß von den übrigen Wurzeln $x_2, x_3, \ldots x_m$ der gegebenen Gleichung abhängt, so kann es immerhin geschehen, daß R und $x_1 - a$ verschiedene Zeichen erhalten, und die Summe $2(x_1 - a)R + 1$ negativ wird; dann also wird man durch die Newton'sche Methode, statt dem wahren Werthe der zu berechnenden Wurzel näher zu kommen, sich davon noch mehr entfernen.

Obschon es schwierig seyn dürfte, die Beschaffenheit von R nach allgemeinen Regeln zu beurtheilen, so kann man sich doch oft über die Anwendbarkeit des Newton'schen Verfahrens sicher stellen, und den Grad der Annäherung, welchen die einzelnen Schritte desselben gewähren, angeben. Die Erörterung dieses Gegenstandes behalten wir uns für die nächste Vorlesung vor.

Fünf und dreißigste Vorlesung.

Über die Anwendbarkeit der Newton'schen Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Wurzeln numerischer Gleichungen.

Es sey wie in der vorhergehenden Vorlesung

(1) $f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0$

die aufzulösende Gleichung, x_1 eine Wurzel derselben, a ein Näherungswerth für diese Wurzel, y der dabei begangene Fehler, also $x_1 = a + y$; so muß auch

(2) $f(a+y) = f(a) + f_1(a) \cdot y + \frac{1}{1.2} f_2(a) \cdot y^2 + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) \cdot y^3 + \ldots\ldots + y^m = 0$

seyn, wobei bekannter Maßen

$f(a) = a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m$

$f_1(a) = m a^{m-1} + (m-1) A_1 a^{m-2} + (m-2) A_2 a^{m-3} + \ldots\ldots + A_{m-1}$

$f_2(a) = m(m-1) a^{m-2} + (m-1)(m-2) A_1 a^{m-3} + (m-2)(m-3) A_2 a^{m-4} + \ldots\ldots + A_{m-2}$

$f_3(a) = m(m-1)(m-2) a^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3) A_1 a^{m-4} + (m-2)(m-3)(m-4) A_2 a^{m-5} + \ldots\ldots + A_{m-3}$

gesetzt wird.

Soll für jenen der m Werthe von y, welcher der Wurzel x_1 zugehört, näherungsweise

(3) $f(a) + f_1(a) \cdot y = 0$

seyn, so haben wir, wenn wir hier v statt y schreiben, da diese letztere Gleichung nicht durch den wahren Werth von y realisirt wird:

$$f(a) = -f_1(a) \cdot v \quad \text{oder} \quad v = -\frac{f(a)}{f_1(a)}.$$

Substituiren wir $-f_1(a) \cdot v$ statt $f(a)$ in der Gleichung (2), so folgt

$$y = v - \frac{1}{f_1(a)} \left[\frac{1}{1.2} f_2(a) \cdot y^2 + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) \cdot y^3 + \ldots + y^m\right],$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$-\frac{1}{f_1(a)} \left[\frac{1}{1.2} f_2(a) + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) \cdot y + \ldots\ldots + y^{m-2}\right] = q$$

seyn lassen:

$$y = v + qy^2,$$

also auch $\qquad x_1 = a + y = a + v + qy^2.$

Betrachtet man demnach $a + v = a - \frac{f(a)}{f_1(a)}$ als einen neuen Näherungswerth für x_1, so ist der numerische Werth des begangenen Fehlers $= qy^2$, daher muß, wenn $a + v$ den Werth der Wurzel x_1 genauer darstellen soll als a, ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$qy^2 < y \quad \text{oder} \quad qy < 1$$

seyn.

Da y, folglich auch q unbekannt ist, so kann man über das Stattfinden dieser Bedingung nicht entscheiden, wenn man nicht wenigstens gewisse Grenzen anzugeben vermag, welche y und q nicht überschreiten.

Untersuchen wir daher, wann y sicher zwischen $+\omega$ und $-\omega$ liegen wird, wobei ω eine gegebene Größe bedeutet.

Soll y sich zwischen $+\omega$ und $-\omega$ befinden, so muß $x_1 = a + y$ zwischen $a + \omega$ und $a - \omega$ fallen. Dieser Umstand tritt aber gewiß ein, wenn

$$f(a+\omega) = f(a) + f_1(a) \cdot \omega + \frac{1}{1.2} f_2(a) \cdot \omega^2 + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) \cdot \omega^3 + \ldots \\ \ldots + \omega^m$$

und

$$f(a-\omega) = f(a) - f_1(a) \cdot \omega + \frac{1}{1.2} f_2(a) \cdot \omega^2 - \frac{1}{1.2.3} f_3(a) \cdot \omega^3 + \ldots \\ \ldots + (-1)^m \omega^m$$

entgegengesetzte Zeichen erhalten, obgleich man nicht sagen kann, daß ausschließend nur unter dieser Bedingung $a + y$ zwischen $a + \omega$ und $a - \omega$, oder y zwischen $+\omega$ und $-\omega$ liegen werde.

Aber y ist seiner Natur nach mehrdeutig, da es im Allgemeinen jeden der Unterschiede zwischen a und den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ bezeichnet. Soll daher jede Unbestimmtheit beseitiget werden, so darf bloß eine Wurzel der genannten Gleichung, nämlich x_1 allein, zwischen $a + \omega$ und $a - \omega$ fallen.

Folgende Betrachtungen werden zu einem Kennzeichen führen, dessen Stattfinden für das Vorhandenseyn des letzterwähnten Umstandes entscheidet.

Es seyen, nachdem man die reellen unter den m Wurzeln x_1, x_2, x_3, ... x_m der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ nach ihrer Größe geordnet hat, von den größten negativen angefangen bis zu den größ-

ten positiven, x_1 und x_2 zwei unmittelbar auf einander folgende derselben. Da, wie wir in der drei und dreißigsten Vorlesung gesehen haben, $f_1(x_1)$ den Werth des Quotienten $\frac{f(x)}{x - x_1}$ für $x = x_1$ ausdrückt, so ist offenbar

$$f_1(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \ldots (x_1 - x_m),$$

und aus demselben Grunde

$$f_1(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_m).$$

Der Voraussetzung gemäß stimmen die Zeichen der reellen unter den Factoren

$$x_1 - x_3,\ x_1 - x_4, \ldots x_1 - x_m$$

des ersten Productes, von welchen allein das Zeichen dieses Productes abhängt, beziehungsweise mit jenen der Factoren

$$x_2 - x_3,\ x_2 - x_4, \ldots x_2 - x_m$$

des zweiten Productes überein; das Zeichen von $x_1 - x_2$ hingegen ist jenem von $x_2 - x_1$ entgegengesetzt: es haben daher $f_1(x_1)$ und $f_1(x_2)$ verschiedene Zeichen, und deßhalb liegt nothwendiger Weise eine Wurzel der Gleichung $f_1(x) = o$ zwischen x_1 und x_2.

Soll nun nebst x_1 auch noch x_2 zwischen die Grenzen $a + \omega$ und $a - \omega$ fallen, so befindet sich die der Gleichung $f_1(x) = o$ gehörende, zwischen x_1 und x_2 enthaltene, Wurzel auch zwischen $a + \omega$ und $a - \omega$; daher muß dieser Gleichung wenigstens durch einen Werth von der Form $a + \xi$, wobei ξ zwischen $+\omega$ und $-\omega$ fällt, Genüge geleistet werden können, d. h. es muß

$$f_1(a + \xi) = o$$

seyn. Da jede der Größen $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a)$, :c. aus der ihr vorhergehenden nach demselben Gesetze entspringt, so ist offenbar

$$f_1(a+\xi) = f_1(a) + f_2(a) \cdot \xi + \frac{1}{1.2} f_3(a) \cdot \xi^2 + \frac{1}{1.2.3} f_4(a) \cdot \xi^3 + \ldots$$
$$\ldots + m\xi^{m-1}.$$

Nimmt man ω so an, daß dieser Ausdruck nicht auf Null reducirt werden kann, so wird, wenn $f(a + \omega)$ und $f(a - \omega)$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = o$, nämlich x_1, zwischen $a + \omega$ und $a - \omega$ liegen.

Dieser Forderung wird offenbar entsprochen, wenn ω so beschaffen ist, daß der numerische Werth des ersten Gliedes des Polynams

$$f_1(a) + f_2(a) \cdot \omega + \frac{1}{1.2} f_3(a) \cdot \omega^2 + \frac{1}{1.2.3} f_4(a) \cdot \omega^3 + \ldots + m\,\omega^{m-1}$$

die Summe der numerischen Werthe aller folgenden Glieder übersteigt; denn unter dieser Annahme ist, wegen $\pm \xi < \omega$, um so mehr der numerische Werth von $f_1(a)$ größer als die Summe der numerischen Werthe der Größen $f_2(a) . \xi$, $\frac{1}{1.2} f_3(a) . \xi^2$, $\frac{1}{1.2.3} f_4(a) . \xi^3$, ꝛc., und somit kann die algebraische Summe der Glieder des obigen Ausdruckes für $f_1(a+\xi)$ nicht verschwinden.

Wenn aber $f(a+\omega)$ und $f(a-\omega)$ wirklich entgegengesetzte Zeichen haben, also y zwischen $+\omega$ und $-\omega$ fällt, und zugleich der numerische Werth von $f_1(a)$ größer ist als die Summe der numerischen Werthe der Größen $f_2(a) . \omega$, $\frac{1}{1.2} f_3(a) . \omega^2$, $\frac{1}{1.2.3} f_4(a) . \omega^3$, ꝛc. $m \omega^{m-1}$; so ist wegen

$$qy = -\frac{1}{f_1(a)} \left[\frac{1}{1.2} f_2(a) . y + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) . y^2 + \ldots + y^{m-1} \right]$$

um so mehr $f_1(a)$ größer als die Summe innerhalb den Klammern, folglich $qy < 1$.

In diesem Falle ist also die Newton'sche Annäherungsmethode anwendbar.

Man wird daher bei der Behandlung einer numerischen Gleichung nach Newton's Annäherungsmethode, nachdem man a festgesetzt hat, noch untersuchen müssen, ob sich ein Werth für ω ausfindig machen läßt, der den so eben ausgesprochenen Bedingungen Genüge leistet.

Nimmt man $\omega = 2v$, so ist die Verschiedenheit der Zeichen von $f(a+\omega) = f(a+2v)$ und $f(a-\omega) = f(a-2v)$ eine nothwendige Folge des Stattfindens der Bedingung, daß der numerische Werth des ersten Gliedes in

$$f_1(a) + f_2(a) . 2v + \frac{1}{1.2} f_3(a) . (2v)^2 + \frac{1}{1.2.3} f_4(a) . (2v)^3 + \ldots \\ \ldots + m(2v)^{m-1}$$

die Summe der numerischen Werthe der übrigen Glieder übertrifft. Denn wegen $f(a) = -f_1(a) . v$, ergibt sich

$$f(a+2v) = f_1(a) . v + \frac{1}{1.2} f_2(a) . (2v)^2 + \frac{1}{1.2.3} f_3(a) . (2v)^3 + \ldots \\ \ldots + (2v)^m$$

und

$$f(a-2v) = -3f_1(a) . v + \frac{1}{1.2} f_2(a) . (2v)^2 - \frac{1}{1.2.3} f_3(a) . (2v)^3 + \ldots \\ \ldots + (-1)^m (2v)^m;$$

unter der gemachten Voraussetzung sind aber die ersten Glieder der zwei Polynome rechter Hand der Gleichheitszeichen, wie man nach Absonderung des Factors v leicht sieht, bei weitem größer, als alle übrigen Glieder zusammengenommen, und deßhalb werden die Zeichen von $f(a+2v)$ und $f(a-2v)$ durch jene von $f_1(a)$ und $-f_1(a)$ bestimmt, woraus der Gegensatz dieser Zeichen erhellet.

Sobald also der numerische Werth von $f_1(a)$ größer gefunden wird, als die Summe der numerischen Werthe von $f_2(a) \,.\, 2v$, $\frac{1}{1\,.\,2} f_3(a) \,.\, (2v)^2$, $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} f_4(a) \,.\, (2v)^3$, ... $m(2v)^{m-1}$, so unterliegt die Anwendbarkeit der Newton'schen Methode keinem Zweifel.

Da in diesem Falle das Zeichen von $f(a+2v)$ mit jenem von $f_1(a)v = -f(a)$ übereinstimmt, so haben $f(a+2v)$ und $f(a)$ entgegengesetzte Zeichen, woraus folgt, daß die Wurzel x_1, auf welche sich der Näherungswerth a bezieht, nicht nur allein zwischen $a+2v$ und $a-2v$, sondern sogar zwischen a und $a+2v$ enthalten ist.

Wenn man sich auch mittelst des oben angegebenen Kennzeichens versichert hat, daß der nach dem Newton'schen Verfahren erhaltene neue Näherungswerth für eine Wurzel einer vorgelegten Gleichung genauer ist, als der vorhergehende; so entsteht doch noch immer die Frage, ob ein dritter Näherungswerth, welcher aus dem so eben gefundenen nach demselben Verfahren abgeleitet wird, wieder mehr Genauigkeit besitzt, als jener. Es wäre daher das erwähnte Kennzeichen immer wieder von Neuem zu berücksichtigen, was ohne Zweifel sehr lästig fallen dürfte. Um diese Arbeit, wo möglich, zu ersparen, wollen wir, vorausgesetzt, daß eine Wurzel x_1 der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und $a+\omega$ falle, und aus einer innerhalb derselben Grenzen befindlichen Zahl b nach der Newton'schen Methode ein Näherungswerth $b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$ für x_1 berechnet werde, untersuchen, ob man nicht wenigstens in einigen Fällen mit Sicherheit schließen darf, daß dieser der Wurzel x_1 näher kommt, als jener.

Soll ohne Rücksicht auf die Zeichen der Totalwerthe

$$x_1 - b > x_1 - \left(b - \frac{f(b)}{f_1(b)}\right)$$

seyn, so muß auch, numerisch betrachtet,

$$f_1(b) > f_1(b) + \frac{f(b)}{x_1 - b},$$

oder, wegen $f(x_1)=0$,

$$f_1(b) > f_1(b) - \frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b} \text{ ausfallen.}$$

Hiezu wird erfordert, daß $f_1(b)$ und $\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}$ einerlei Zeichen besitzen, und daß der numerische Werth von $f_1(b)$ mehr beträgt als die Hälfte des Werthes von $\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}$. Man kann diese Bedingungen kurz dadurch ausdrücken, daß man sagt, die Zeichen von

$$\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b} \quad \text{und} \quad 2f_1(b) - \frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}$$

müssen übereinstimmen.

Setzen wir nun $x_1 = a+y$, $b = a+\beta$, wobei y und β einerlei Zeichen haben, und zwischen o und ω liegen, so haben wir

$$f(x_1) = f(a) + f_1(a).y + \frac{1}{1.2}f_2(a).y^2 + \frac{1}{1.2.3}f_3(a).y^3 + \ldots + y^m,$$

$$f(b) = f(a) + f_1(a).\beta + \frac{1}{1.2}f_2(a).\beta^2 + \frac{1}{1.2.3}f_3(a).\beta^3 + \ldots + \beta^m,$$

$$f_1(b) = f_1(a) + f_2(a).\beta + \frac{1}{1.2}f_3(a).\beta^2 + \frac{1}{1.2.3}f_4(a).\beta^3 + \ldots$$
$$\ldots + m\beta^{m-1},$$

also, da $x_1 - b = y - \beta$, und wenn r eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$\frac{y^r-\beta^r}{y-\beta} = y^{r-1} + y^{r-2}\beta + y^{r-3}\beta^2 + y^{r-4}\beta^3 + \ldots + y\beta^{r-2} + \beta^{r-1}$$

ist,

$$\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b} = f_1(a) + \frac{1}{1.2}f_2(a)[y+\beta] + \frac{1}{1.2.3}f_3(a)[y^2+y\beta+\beta^2] + \text{etc.}$$

und

$$2f_1(b) - \frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b} =$$

$$= f_1(a) - \frac{1}{1.2}f_2(a)[y+\beta-4\beta] - \frac{1}{1.2.3}f_3(a)[y^2+y\beta+\beta^2-6\beta^2] - \text{etc.}$$

Der Factor, welcher die Größe $\frac{1}{1.2.3\ldots r}f_r(a)$ in der Entwickelung von $\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}$ begleitet, ist

$$y^{r-1} + y^{r-2}\beta + y^{r-3}\beta^2 + y^{r-4}\beta^3 + \ldots + y\beta^{r-2} + \beta^{r-1},$$

und sein numerischer Werth beträgt weniger als $r\,y^{r-1}$, oder weniger als $r\beta^{r-1}$, je nachdem y oder β den größeren Werth besitzt; eben so ist der numerische Werth des Multiplicators derselben Größe in der Entwickelung von $2f_1(b) - \frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}$, nämlich der Werth der Summe

$y^{r-1} + y^{r-2}\beta + y^{r-3}\beta^2 + y^{r-4}\beta^3 + \ldots + y\beta^{r-2} + \beta^{r-1} - 2r\beta^{r-1}$, geringer als die größere der Zahlen ry^{r-1} und $2r\beta^{r-1}$; ω aber übertrifft sowohl y als auch β, daher ist der numerische Werth des Coefficienten von $\frac{1}{1.2.3\ldots r} f_r(a)$ in jeder der beiden Entwickelungen kleiner als $2r\omega^{r-1}$.

Hieraus folgt, daß $\frac{f(x_1) - f(b)}{x_1 - b}$ und $2f_1(b) - \frac{f(x_1) - f(b)}{x_1 - b}$ gewiß dasselbe Zeichen erhalten, wenn der numerische Werth von $f_1(a)$ größer ist, als die doppelte Summe der numerischen Werthe von $f_2(a)\omega$, $\frac{1}{1.2}f_3(a).\omega^2$, $\frac{1}{1.2.3}f_4(a).\omega^3$, ... $m\omega^{m-1}$, unter welcher Bedingung also auch $b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$ dem Werthe der Wurzel x_1 näher liegen wird, als b.

Hat man demnach aus einem Näherungswerthe a für die Wurzel x_1 der Gleichung $f(x) = 0$ einen anderen $a + v = a_1$ abgeleitet, wobei $v = -\frac{f(a)}{f_1(a)}$ ist, und findet man

$$f_1(a) > 2\left[f_2(a).2v + \frac{1}{1.2}f_3(a).(2v)^2 + \frac{1}{1.2.3}f_4(a).(2v)^3 + \ldots\ldots + m(2v)^{m-1}\right],$$

in so fern alle hier erscheinenden Größen positiv genommen werden; so kömmt nicht nur allein a_1 der Wurzel x_1 näher als a, sondern auch der aus a_1 neuerdings entspringende Näherungswerth $a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(b_1)} = a_2$ drückt diese Wurzel genauer aus, als der vorhergehende. Fällt a_2 zwischen a und $a + 2v$, so bietet dieser Näherungswerth wieder einen genaueren $a_2 - \frac{f(a_2)}{f_1(a_2)} = a_3$ dar, u. s. w.

Der Grad der Genauigkeit eines durch das Newton'sche Verfahren gewonnenen Näherungswerthes läßt sich oft durch die Bemerkung beurtheilen, daß wenn y den auf den vorhergehenden Näherungswerth sich beziehenden Fehler angibt, der Fehler für die folgende Näherung durch qy^2 ausgedrückt wird, wobei q die am Anfang dieser Vorlesung festgesetzte Bedeutung hat. Findet man nämlich $y < \frac{1}{10^p}$ und $q < \frac{1}{10^q}$, so ist $qy^2 < \frac{1}{10^{2p+q}}$.

Sechs und dreißigste Vorlesung.

Über Lagrange's Methode zur näherungsweisen Bestimmung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen.

Dieser Methode zufolge werden die reellen Wurzeln der aufzulösenden numerischen Gleichung durch Kettenbrüche ausgedrückt, deren Zähler sämmtlich $= 1$, und deren Nenner ganze Zahlen sind.

Es sey $f(x) = 0$ die gegebene Gleichung, und x_1 die zu berechnende Wurzel. Setzt man statt x in dem Polynome $f(x)$ nach und nach die Glieder einer zweckmäßig gewählten arithmetischen Progression, und beachtet man die Zeichen der erhaltenen Resultate, so ist man jederzeit im Stande die zwei unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen anzugeben, zwischen welche der Werth von x_1 fällt. Man nehme eine derselben, z. B. die nächst kleinere k_0, im Sinne der dreizehnten Vorlesung, und setze $x_1 = k_0 + \frac{1}{y_1}$. Wird dieser Ausdruck in die Gleichung $f(x) = 0$ statt x eingeführt, so erhält man zur Bestimmung des Werthes von y_1 eine transformirte Gleichung $F_1(y_1) = 0$, von derselben Ordnung wie die gegebene, deren Wurzeln die reciproken Werthe der zwischen k_0 und sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ bestehenden Unterschiede sind. Diese Transformation wird nach den Formeln I. der sieben und zwanzigsten Vorlesung leicht vollzogen, wenn man k_0 statt des dort befindlichen a setzt, und, weil $\frac{1}{y}$ an die Stelle von y kommt, um die Gleichung sogleich geordnet zu erhalten, die Coefficienten in (2) oder in (3) in verkehrter Ordnung schreibt. Da für alle Werthe von x, welche zwischen k_0 und $k_0 + 1$ liegen, $\frac{1}{y_1}$ positiv und kleiner als die Einheit, folglich y_1 selbst positiv und größer als die Einheit seyn muß; so wird die Gleichung $F_1(y_1) = 0$ nur so viele reelle positive die Einheit übersteigende Wurzeln zulassen, als Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen k_0 und $k_0 + 1$ sich vorfinden. Um daher über die Beschaffenheit der Gleichung $F_1(y_1) = 0$ nicht in Ungewißheit zu seyn, ist es nöthig, mittelst einer gehörig klein angenommenen Differenz zwischen den Gliedern der statt x in $f(x)$ zu substituirenden Pro-

gression das Intervall von k_0 bis $k_0 + 1$ genau zu untersuchen. Wäre dieß aber noch nicht geschehen, so könnte die Betrachtung der Gleichung $F_1(y_1) = 0$ selbst darüber Aufschluß geben. Man suche nun zu einem der Werthe von y_1 die nächst kleinere ganze Zahl k_1, und transformire die Gleichung $F_1(y_1) = 0$ durch die Substitution $y_1 = k_1 + \frac{1}{y_2}$ in die Gleichung $F_2(y_2) = 0$. Dieser letzteren gehören ebenfalls so viele reelle positive die Einheit übersteigende Wurzeln, als es Werthe von y_1 zwischen k_1 und $k_1 + 1$ gibt. Bestimmt man auf dieselbe Weise für y_2, y_3, y_4, ꝛc. die nächst kleineren ganzen Zahlen k_2, k_3, k_4, ꝛc., so führen die Substitutionen $y_2 = k_2 + \frac{1}{y_3}$, $y_3 = k_3 + \frac{1}{y_4}$, $y_4 = k_4 + \frac{1}{y_5}$, ꝛc. auf die transformirten Gleichungen $F_3(y_3) = 0$, $F_4(y_4) = 0$, $F_5(y_5) = 0$, ꝛc. Sobald einer dieser Gleichungen, z. B. $F_r(y_r) = 0$ innerhalb des Intervalles von k_n bis $k_n + 1$ nur eine einzige Wurzel entspricht, läßt jede der folgenden transformirten Gleichungen $F_{r+1}(y_{r+1}) = 0$, $F_{r+2}(y_{r+2}) = 0$, ꝛc. nur eine einzige reelle positive Wurzel zu, welche größer ist als 1.

Durch dieses Verfahren lernt man offenbar nach und nach die Glieder des Kettenbruches kennen, welcher eine Wurzel x_1 der Gleichung $f(x) = 0$ darstellt; denn es ist den Gleichungen $x_1 = k_0 + \frac{1}{y_1}$, $y_1 = k_1 + \frac{1}{y_2}$, $y_2 = k_2 + \frac{1}{y_3}$, $y_3 = k_3 + \frac{1}{y_4}$, ꝛc. zufolge

$$x_1 = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \text{ꝛc.}}}}$$

Da wir hier immer die nächst kleineren ganzen Werthe der Wurzeln der transformirten Gleichungen genommen haben, so sind die Nenner k_1, k_2, k_3, ꝛc. sämmtlich positiv; k_0 aber hat mit x_1 dasselbe Zeichen. Man kann aber auch die nächst größeren ganzen Werthe der erwähnten Wurzeln wählen, in welchem Falle sich unter den Nennern k_1, k_2, k_3, ꝛc. auch negative vorfinden. Daß hiedurch der Kettenbruch, wenn man nämlich die der Einheit gleichen Nenner zu vermeiden sucht, oft kürzer ausfällt, erhellet aus der dreizehnten Vorlesung.

Da die reducirten Werthe eines Kettenbruches von obiger Form sich der durch denselben vorgestellten Größe um so mehr nähern, zu je späteren Gliedern sie gehören; da man ferner den Grad ihrer Annäherung bei jedem einzelnen Schritte genau anzugeben vermag, und sie

sich bekanntlich auch noch durch andere vortheilhafte Eigenschaften empfehlen: so ließe diese Näherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen nichts zu wünschen übrig, wenn es nicht sehr beschwerlich wäre, die Zahlen k_1, k_2, k_3, rc. nach und nach aufzusuchen, da die Bestimmung jeder einzelnen derselben die Behandlung einer eigenen transformirten Gleichung erfordert.

Der scharfsinnige Erfinder dieser Methode hat ihren Gebrauch durch verschiedene Bemerkungen zu erleichtern gesucht, wovon wir die wichtigsten hier anführen wollen.

Es seyen $\frac{M_{r-1}}{N_{r-1}}$ und $\frac{M_r}{N_r}$ zwei auf einander folgende Näherungsbrüche für x_1, so ist (zwölfte Vorlesung) in Bezug auf die transformirte Gleichung $F_{r+1}(y_{r+1}) = 0$

$$x_1 = \frac{M_r\, y_{r+1} + M_{r-1}}{N_r\, y_{r+1} + N_{r-1}},$$

folglich
$$y_{r+1} = \frac{N_{r-1}\, x_1 - M_{r-1}}{M_r - N_r\, x_1}.$$

Fällt x_1 zwischen λ und μ, so ist y_{r+1} zwischen

$$\frac{N_{r-1}\,\lambda - M_{r-1}}{M_r - N_r\,\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{N_{r-1}\,\mu - M_{r-1}}{M_r - N_r\,\mu}$$

enthalten. Bestimmt man die Grenzen λ und μ auf die bekannte Weise dergestalt, daß bloß x_1 allein und sonst keine andere Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen denselben liegt; so kann sich zwischen obigen Grenzen für y_{r+1} auch nur ein Werth dieser Größe, nämlich der zu x_1 gehörende befinden. Hiedurch wird man in den Stand gesetzt, die beiden nächsten ganzen Zahlen, innerhalb welchen y_{r+1} liegt, mit Sicherheit anzugeben, ohne sehr vieler Substitutionen zu benöthigen, oder wenn etwa mehrere Werthe von y_{r+1} zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen erscheinen, eine arithmetische Progression zu Hülfe nehmen zu müssen, deren Differenz kleiner ist, als der kleinste Unterschied je zweier Wurzeln der transformirten Gleichung $F_{r+1}(y_{r+1}) = 0$.

Der obige Ausdruck für y_{r+1} gibt

$$y_{r+1} = \frac{N_{r-1}}{N_r} \cdot \frac{x_1 - \frac{M_{r-1}}{N_{r-1}}}{\frac{M_r}{N_r} - x_1} = \frac{N_{r-1}}{N_r}\left(\frac{\frac{M_r}{N_r} - \frac{M_{r-1}}{N_{r-1}}}{\frac{M_r}{N_r} - x_1} - 1\right).$$

Es ist aber $\frac{M_r}{N_r} - \frac{M_{r-1}}{N_{r-1}} = \frac{(-1)^{r+1}}{N_{r-1}\,N_r}$, folglich

$$y_{r+1} = \frac{(-1)^{r-1}}{N_r^2\left(\frac{M_r}{N_r} - x_1\right)} - \frac{N_{r-1}}{N_r}.$$

Bezeichnen wir die übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ durch $x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_m$, und die denselben correspondirenden Wurzeln der transformirten Gleichung $F_{r+1}(y_{r+1})=0$ durch $v_2, v_3, v_4, \ldots\ldots v_m$, so haben wir aus demselben Grunde:

$$v_2 = \frac{(-1)^{r-1}}{N_r^2\left(\frac{M_r}{N_r} - x_2\right)} - \frac{N_{r-1}}{N_r},$$

$$v_3 = \frac{(-1)^{r-1}}{N_r^2\left(\frac{M_r}{N_r} - x_3\right)} - \frac{N_{r-1}}{N_r},$$

u. s. w.

$$v_m = \frac{(-1)^{r-1}}{N_r^2\left(\frac{M_r}{N_r} - x_m\right)} - \frac{N_{r-1}}{N_r}.$$

Ist $F_{r+1}(y_{r+1}) = V_0 y_{r+1}^m + V_1 y_{r+1}^{m-1} + V_2 y_{r+1}^{m-2} + \ldots + V_m$, so ist

$$y_{r+1} + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_m = -\frac{V_1}{V_0},$$

also $$y_{r+1} = -\frac{V_1}{V_0} - v_2 - v_3 - \ldots\ldots - v_m;$$

und wenn man die obigen Ausdrücke für $v_2, v_3, \ldots v_m$ zu Hülfe nimmt,

$$y_{r+1} = -\frac{V_1}{V_0} + (m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r}$$
$$+ \frac{(-1)^r}{N_r^2}\left(\frac{1}{\frac{M_r}{N_r} - x_2} + \frac{1}{\frac{M_r}{N_r} - x_3} + \ldots + \frac{1}{\frac{M_r}{N_r} - x_m}\right).$$

Schreitet man in der Bildung der transformirten Gleichungen ununterbrochen fort, und berechnet man die denselben zugehörigen Werthe von $\frac{M_r}{N_r}$, so kann dieser Bruch dem Werthe der Wurzel x_1, folglich jede der Differenzen $\frac{M_r}{N_r} - x_2$, $\frac{M_r}{N_r} - x_3$, ꝛc. der correspondirenden $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, ꝛc. so nahe gebracht werden, als man nur immer will, und deßhalb ist die Summe

$$\frac{1}{\frac{M_r}{N_r} - x_2} + \frac{1}{\frac{M_r}{N_r} - x_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\frac{M_r}{N_r} - x_m},$$

welche wir der Kürze wegen durch S_r bezeichnen wollen, bei dem unendlichen Wachsen von r keines unendlichen Zunehmens fähig, sondern an die Grenze

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3} + \ldots + \frac{1}{x_1 - x_m} = S$$

gebunden *). Aber N_r, daher auch N_r^2, kann dabei jede beliebige noch so große Zahl überschreiten; folglich nimmt, bei dem unendlichen Wachsen von r, das letzte Glied in dem Ausdrucke

$$y_{r+1} = -\frac{V_1}{V_0} + (m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r} + \frac{(-1)^r S_r}{N_r^2}$$

unendlich ab, und es wird zuletzt mit jeder beliebigen Schärfe genau

$$y_{r+1} = -\frac{V_1}{V_0} + (m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r}.$$

Sobald der numerische Werth von $\frac{S_r}{N_r^2} < \frac{1}{2}$ geworden ist, so befindet sich y_{r+1} innerhalb den Grenzen

$$-\frac{V_1}{V_0} + (m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r} + \frac{1}{2} \text{ und } -\frac{V_1}{V_0} + (m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r} - \frac{1}{2},$$

und die zwischen denselben enthaltene ganze Zahl ist eine der beiden unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen, zwischen welchen y_{r+1} liegt; so, daß man von $F_{r+1}(y_{r+1}) = 0$ angefangen, die den in der Frage stehenden Wurzeln aller successiven transformirten Gleichungen am meisten sich nähernden ganzen Zahlen ohne Mühe anzugeben vermag.

Einige Aufmerksamkeit auf den Gang der Rechnung wird bald lehren, ob man schon bei einer transformirten Gleichung angelangt

---

*) Der Fall, wenn $\frac{M_r}{N_r}$ zufällig einer der Wurzeln $x_2, x_3, \ldots x_m$ gleich würde, braucht hier nicht berücksichtiget zu werden, da diese Gleichheit für ein folgendes r aufhört. Auch hat man zur Ausmittelung der rationalen Wurzeln der Gleichungen ein besonderes Verfahren, welches man bei jeder vorgelegten Gleichung anwenden wird, ehe man die incommensurablen Wurzeln derselben zu berechnen unternimmt, da die Wegschaffung schon bekannter Wurzeln die Gleichung selbst vereinfacht.

sey, welche den Gebrauch des so eben erklärten bequemen Verfahrens zur Bestimmung des fraglichen ganzen Näherungswerthes ihrer die Einheit übertreffenden Wurzel gestattet. Hat man nämlich die ganzen Zahlen k_{r+1} und $k_{r+1}+1$ gefunden, zwischen welchen y_{r+1} liegt, so untersuche man, ob die zwischen

$$-\frac{V_1}{V_0}+(m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r}+\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{V_1}{V_0}+(m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r}-\frac{1}{2}$$

befindliche ganze Zahl mit einer der ersteren übereinstimmt, und wenn dieß der Fall seyn sollte, ob y_{r+1} innerhalb den letztgenannten Grenzen enthalten ist. Findet dieser Umstand auch Statt, so besitzt die transformirte Gleichung $F_{r+1}(y_{r+1})=0$ die erwähnte Eigenschaft.

Da $$-\frac{V_1}{V_0}=y_{r+1}+v_2+v_3+\ldots+v_m$$

ist, so haben wir nach vollbrachter Substitution der obigen Werthe von $y_{r+1}, v_2, v_3, \ldots v_m$

$$-\frac{V_1}{V_0}=-m\frac{N_{r-1}}{N_r}+\frac{(-1)^{r-1}}{N_r^2}\left(\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_1}+\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_2}+\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_m}\right).$$

Ist nun

$$f(x)=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$$

die gegebene Gleichung, so ergibt sich für jeden Werth von a, wie aus der vier und dreißigsten Vorlesung erhellet,

$$\frac{f_1(a)}{f(a)}=$$
$$=\frac{ma^{m-1}+(m-1)A_1a^{m-2}+(m-2)A_2a^{m-3}+\ldots+A_{m-1}}{a^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\ldots+A_{m-1}a+A_m}$$
$$=\frac{1}{a-x_1}+\frac{1}{a-x_2}+\frac{1}{a-x_3}+\ldots+\frac{1}{a-x_m},$$

folglich kann man $\dfrac{f_1\left(\frac{M_r}{N_r}\right)}{f\left(\frac{M_r}{N_r}\right)}$ statt

$$\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_1}+\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_2}+\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_3}+\ldots+\frac{1}{\frac{M_r}{N_r}-x_m}$$

setzen. Hiedurch wird

$$-\frac{V_1}{V_0} = -m\frac{N_{r-1}}{N_r} + \frac{(-1)^{r-1}}{N_r^2} \cdot \frac{f_1\left(\frac{M_r}{N_r}\right)}{f\left(\frac{M_r}{N_r}\right)};$$

also, wenn man der Kürze wegen

$$P = \frac{mM_r^{m-1} + (m-1)A_1M_r^{m-2}N_r + (m-2)A_2M_r^{m-3}N_r^2 + \ldots + A_{m-1}N_r^{m-1}}{M_r^m + A_1M_r^{m-1}N_r + A_2M_r^{m-2}N_r^2 + \ldots + A_{m-1}M_rN_r^{m-1} + A_mN_r^m}$$

seyn läßt,

$$-\frac{V_1}{V_0} = -m \cdot \frac{N_{r-1}}{N_r} + \frac{(-1)^{r-1}P}{N_r}$$

und

$$-\frac{V_1}{V_0} + (m-1)\frac{N_{r-1}}{N_r} = \frac{(-1)^{r-1}P - N_{r-1}}{N_r}.$$

Demnach liegt y_{r+1}, wenn $\frac{S_r}{N_r^2} < \frac{1}{2}$ geworden ist, zwischen

$$\frac{(-1)^{r-1}P - N_{r-1}}{N_r} + \frac{1}{2} \text{ und } \frac{(-1)^{r-1}P - N_{r-1}}{N_r} - \frac{1}{2};$$

und man bedarf dann zur Bestimmung der ganzen Zahl, welche der Größe y_{r+1} am nächsten kommt, der transformirten Gleichung $F_{r+1}(y_{r+1}) = 0$ gar nicht, so daß die ganze folgende Rechnung ohne die Bildung der transformirten Gleichungen vollzogen werden kann, welche die jedesmaligen Ergänzungen des zu suchenden Kettenbruches zu Wurzeln haben.

Sieben und dreißigste Vorlesung.

Über die Bestimmung der imaginären Wurzeln numerischer Gleichungen, und über die Behandlung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Die imaginären Wurzeln der Gleichungen mit reellen Coefficienten, von welchen allein hier die Rede ist, sind stets paarweise vorhanden, und an die Formen $p+q\sqrt{-1}$, $p-q\sqrt{-1}$ gebunden, worin p und q reelle Größen anzeigen. Die Werthe von p und q lassen sich in jedem einzelnen Falle durch Annäherung so genau ausmitteln, als es verlangt wird, wie aus folgenden Betrachtungen erhellet.

Es sey $f(x)=0$ die gegebene Gleichung. Man denke sich die Quadrate der Differenzen je zweier ihrer Wurzeln gebildet, so können diese Quadrate in folgende vier Classen abgetheilt werden:

1) Quadrate der Differenzen zweier reeller Wurzeln. Diese sind nothwendig reell und positiv.

2) Quadrate der Differenzen zweier zusammengehöriger imaginärer Wurzeln, wie $p+q\sqrt{-1}$, $p-q\sqrt{-1}$. Sie haben die Form $(2q\sqrt{-1})^2=-4q^2$, und sind daher stets reell und negativ.

3) Quadrate der Differenzen zweier Wurzeln, wovon eine reell und die andere imaginär ist. Diese sind im Allgemeinen imaginär; sie können aber auch reell und negativ ausfallen, wenn nämlich die reelle Wurzel den reellen Theil der imaginären tilgt; jedoch erscheinen solche Quadrate, der zusammengehörigen imaginären Wurzeln wegen, immer paarweise einander gleich.

4) Quadrate der Differenzen zweier nicht zusammengehöriger imaginärer Wurzeln. Sie sind im Allgemeinen imaginär, und werden nur dann reell, wenn entweder die reellen oder die imaginären Bestandtheile der von einander subtrahirten Wurzeln übereinstimmen. Der erste Fall erzeugt, wenn man die correspondirenden imaginären Wurzeln berücksichtiget, vier reelle negative Quadrate, wovon zwei und zwei einander gleich sind; im zweiten Falle ergeben sich aber nur zwei reelle und positive Quadrate.

Leitet man daher aus der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ eine andere $F(y)=0$ ab, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der

Wurzeln der ersteren sind, und bestimmt man, nöthigen Falls durch Annäherung, die reellen negativen Werthe von y, welche immer vorhanden seyn müssen, wenn anders die Gleichung $f(x)=0$ imaginäre Wurzeln enthält, so kommen darunter gewiß die vierfachen Quadrate der Factoren des in den imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung befindlichen Radicals $\sqrt{-1}$ vor. Sind die erwähnten Werthe von y, welche wir $-y_1$, $-y_2$, $-y_3$, ꝛc. nennen wollen, sämmtlich von einander verschieden, so gehören der Gleichung $f(x)=0$ eben so viele Paare correspondirender imaginärer Wurzeln. Man setze in diesem Falle $x=u+v\sqrt{-1}$, wobei die reellen Größen u, v noch unbekannt sind, so geht $f(x)$ in $\varphi(u, v)+\sqrt{-1}\,.\,\psi(u, v)$ über. Die reellen Functionen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ müssen jede für sich allein verschwinden, wenn $u+v\sqrt{-1}$ der Gleichung $f(x)=0$ wirklich Genüge leistet, daher hat man die Gleichungen $\varphi(u, v)=0$, $\psi(u, v)=0$. Diese müssen, wenn man statt v nach und nach die bekannten Zahlen $\frac{\sqrt{y_1}}{2}$, $\frac{\sqrt{y_2}}{2}$, $\frac{\sqrt{y_3}}{2}$, ꝛc. substituirt, so daß in beiden Gleichungen nur mehr die Unbekannte u zurückbleibt, für jede dieser Substitutionen eine, aber außer dieser keine andere, gemeinschaftliche Wurzel besitzen: es werden daher die Polynome $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ für jeden der Werthe von v einen gemeinschaftlichen Factor zulassen, worin u nur in der ersten Potenz erscheint. Sucht man also nach den Regeln der Arithmetik den größten gemeinschaftlichen Divisor von $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$, so gibt dieser, gleich Null gesetzt, den Werth von u, welcher dem speciellen in die Rechnung aufgenommenen Werthe von v entspricht.

Begreiflich kann man auch v unbestimmt lassen, und mit den nach den Potenzen von u geordneten Polynomen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ nach der Methode des größten gemeinschaftlichen Theilers verfahren, bis man auf einen Rest kommt, der die Größe u nur in der ersten Potenz enthält. Dieser Rest, der Nulle gleich gesetzt, gibt für jeden Werth von v sogleich das zugehörige u.

Sind aber unter den reellen negativen Wurzeln $-y_1$, $-y_2$, $-y_3$, ꝛc. der Gleichung $F(y)=0$ mehrere einander gleiche vorhanden, so rühren dieselben entweder von der Gleichheit eben so vieler der unter 2) angeführten Quadrate der Differenzen je zweier zusammengehöriger imaginärer Wurzeln her, in welchem Falle die Gleichung $f(x)=0$ doppelt so viele imaginäre Wurzeln enthält, deren imaginäre

Neun und dreißigste Vorlesung.

Über die arithmetischen Reihen.

Eine Reihe, welche die Eigenschaft besitzt, daß die Glieder einer ihrer Differenzreihen sämmtlich einander gleich werden, und daher alle folgenden Differenzreihen verschwinden, heißt eine arithmetische Reihe; und zwar vom m^{ten} Range, wenn die m^{te} Differenzreihe aus gleichen Gliedern besteht.

Die arithmetische Reihe vom ersten Range wird in der Elementar-Mathematik unter dem Namen arithmetische Progression betrachtet.

Die Differenzreihen einer arithmetischen Reihe, so wie auch ihre summirenden Reihen, sind offenbar ebenfalls arithmetische Reihen; die r^{te} Differenzreihe einer arithmetischen Reihe vom m^{ten} Range gehört zum $(m-r)^{ten}$, und die r^{te} summirende Reihe zum $(m+r)^{ten}$ Range.

Man erhält die allgemeine Form der Glieder einer arithmetischen Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ u_n,\ \ldots\ldots$$

vom m^{ten} Range, wenn man in der Formel (10) der vorhergehenden Vorlesung $\Delta^{m+1} u_0 = \Delta^{m+2} u_0 = \Delta^{m+3} u_0 =$ ꝛc. $= 0$ setzt. Hiedurch wird

$$(16)\quad u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{m-1} \Delta^{m-1} u_0 + \binom{n}{m} \Delta^m u_0.$$

Entwickelt man die Binomialcoefficienten

$$\binom{n}{1} = n,\quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},\quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \text{ꝛc.}$$

nach den Potenzen von n, so geht die Formel (16) in folgende über:

$$(17)\quad u_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + \ldots + A_{m-1} n^{m-1} + A_m n^m,$$

wobei $A_0 = u_0$ ist, und die übrigen Coefficienten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots\ A_m$ bloß von den Differenzen $\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \Delta^3 u_0,\ \ldots\ \Delta^m u_0$ abhängen. Die Formel (17) ändert ihre Gestalt nicht, wenn man auch ein anderes Glied der arithmetischen Reihe mit dem Zeiger 0 belegt, d. h. wenn man $a+n$ statt n setzt, wobei a eine gegebene ganze Zahl ist, nur wird die Art der Zusammensetzung der Coefficienten $A_0,\ A_1,$

$A_2, A_3, \ldots . A_m$ aus u_0 und $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots . \Delta^m u_0$ verschieden ausfallen. Immer aber werden diese Coefficienten, wie es der Gang dieser Entwickelungen mit sich bringt, bloße Aggregate der mit numerischen Factoren multiplicirten Größen $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots . \Delta^m u_0$ seyn, so daß sich diese Größen durch die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots . A_m$ jederzeit, nach der bekannten Auflösungsmethode mehrerer Gleichungen mit mehreren Unbekannten vom ersten Grade, berechnen lassen. Hieraus folgt, daß auch umgekehrt jeder ganze rationale Ausdruck von der Form

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + \ldots . + A_{m-1} n^{m-1} + A_m n^m$$

das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe vom m^{ten} Range darstellt, von welchem Gliede auch immer die veränderliche ganze Zahl n ihren Ursprung nimmt.

Das Glied $A_m n^m$ der Formel (17) wird einzig und allein durch das Glied

$$\binom{n}{m} \Delta^m u_0 = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots . m} \Delta^m u_0$$

der Formel (16) erzeugt, denn nur dieses besitzt m von n abhängende Factoren. Offenbar ist

$$A_m = \frac{\Delta^m u_0}{1.2.3 \ldots . m}, \text{ folglich}$$

$$(18) \qquad \Delta^m u_0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots m \cdot A_m.$$

Dieser Ausdruck gibt uns ein leichtes Mittel an die Hand, den Betrag der Glieder der letzten Differenzreihe einer arithmetischen Reihe zu bestimmen, wenn das allgemeine Glied dieser Reihe als eine Function des Zeigers n vor Augen liegt.

Da $\Delta^m u_0$ verschwindet, wenn $A_m = 0$ ist, und von Null verschieden ausfällt, wenn A_m nicht gleich Null ist; so können in (17) einige oder alle der m ersten Coefficienten $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots . A_{m-1}$ fehlen, ohne daß diese Formel aufhört das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe vom m^{ten} Range auszudrücken. Es richtet sich also der Rang der durch eine ganze rationale Function des Zeigers n gegebenen arithmetischen Reihe nach dem Grade dieser Function. Aus dieser Bemerkung und aus dem Umstande, daß $\Delta^m u_0$ bloß von A_m abhängt, ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Summen oder die Unterschiede der correspondirenden Glieder zweier arithmetischen Reihen von verschiedenen Ordnungen stellen

eine arithmetische Reihe dar, welche in Bezug auf ihren Rang und auf ihre letzte Differenzreihe mit der höheren der beiden andern Reihen übereinstimmt. Sind aber diese zwei Reihen von gleichem Range, so besitzt die neugebildete Reihe im Allgemeinen denselben Rang, und das constante Glied ihrer letzten Differenzreihe ist die Summe oder der Unterschied der letzten Differenzen der beiden andern.

2) Die Producte der correspondirenden Glieder mehrerer arithmetischen Reihen geben wieder eine arithmetische Reihe, deren Ordnungszahl die Summe der Ordnungszahlen der übrigen Reihen ist. Die Reihe der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen, so wie jene der m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Progression ist also eine arithmetische Reihe vom m^{ten} Range. Die letzte Differenz der Reihe der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen wird durch das Product $1 . 2 . 3 . 4 \dots . m$ ausgedrückt.

Setzt man in (17) statt n die Größe $\alpha + \beta\nu$, und ertheilt man der Zahl ν, während α und β ungeändert bleiben, nach und nach die Werthe $1, 2, 3, 4, \dots$, so erhält man wieder eine arithmetische Reihe vom m^{ten} Range, deren letzte Differenz zu jener der ursprünglichen Reihe in einer einfachen Relation steht. Der Ausdruck (17) geht nämlich bei der erwähnten Substitution in

$$A_0 + A_1(\alpha + \beta\nu) + A_2(\alpha + \beta\nu)^2 + \dots + A_m(\alpha + \beta\nu)^m$$

über, welcher, wenn man ihn nach den steigenden Potenzen von ν ordnet, unter der Form

$$B_0 + B_1\nu + B_2\nu^2 + B_3\nu^3 + \dots + B_m\nu^m$$

erscheint, und sobald man ν als den veränderlichen Zeiger der Glieder einer arithmetischen Reihe betrachtet, offenbar das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe vom m^{ten} Range darstellt. Die letzte Differenz δ der Reihe, welche den Ausdruck (17) zum allgemeinen Gliede hat, ist

$$= 1 . 2 . 3 \dots . m . A_m;$$

ferner ist die letzte Differenz τ der neugebildeten Reihe

$$= 1 . 2 . 3 \dots . m . B_m.$$

Aber, wie man aus der obigen Transformation leicht sieht, ist $B_m = A_m\beta^m$; folglich besteht zwischen den letzten Differenzen beider Reihen die Gleichung

$$\tau = \beta^m . \delta.$$

Läßt man α und β ganze Zahlen seyn, so werden durch die Substitutionen von $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, $\alpha + 3\beta$, $\alpha + 4\beta$, ... statt n aus der ursprünglich vorhandenen arithmetischen Reihe, welche sich auf das allgemeine Glied (17) bezieht, vom Gliede, dessen Zeiger α ist, angefangen, um das Intervall β gleichweit von einander abstehende Glieder herausgehoben, welche demnach für sich eine arithmetische Reihe desselben Ranges wie die frühere, bilden; wird aber statt β ein Bruch von der Form $\frac{1}{\mu}$, dessen Nenner μ eine ganze Zahl ist, gesetzt, so werden durch die Substitutionen von $\alpha + \frac{1}{\mu}$, $\alpha + \frac{2}{\mu}$, $\alpha + \frac{3}{\mu}$, $\alpha + \frac{4}{\mu}$, ... statt n, zwischen je zwei Glieder der ursprünglichen Reihe, vom α^{ten} Gliede angefangen, $\mu - 1$ neue Glieder eingeschaltet, welche sich an die vorigen zu einer arithmetischen Reihe desselben Ranges anschließen.

Jede Reihe, bei welcher die ersten Glieder der auf einander folgenden Differenzreihen, von irgend einer Differenzreihe angefangen, sich als abnehmende, bei dem in der Rechnung beabsichtigten Grade der Genauigkeit zu vernachläßigende Größen zeigen, kann näherungsweise als eine arithmetische Reihe betrachtet werden. Durch das so eben angedeutete Verfahren wird man in den Stand gesetzt, zwischen die Glieder derselben in Übereinstimmung mit dem in der Reihe herrschenden Gesetze, so viele neue Glieder einzuschalten oder zu interpoliren (vergl. die dritte Vorles.), als man will, was bei dem Gebrauche der zum Behufe der practischen Mathematik üblichen Hülfstafeln unzählige Vortheile gewährt.

Man kann jedes Glied u_n einer arithmetischen Reihe vom m^{ten} Range auch unmittelbar durch die $m + 1$ ersten Glieder derselben, u_0, u_1, u_2, u_3, ... u_m, ausdrücken. Zu diesem Ende schaffe man aus der Formel (16) die Größen Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, $\Delta^4 u_0$, u. s. w. mit Hülfe der aus dem Früheren bekannten Ausdrücke

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0$$

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - \binom{2}{1} u_1 + u_0$$

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - \binom{3}{1} u_2 + \binom{3}{2} u_1 - u_0$$

$$\Delta^4 u_0 = u_4 - \binom{4}{1} u_3 + \binom{4}{2} u_2 - \binom{4}{3} u_1 + u_0$$

u. s. w.

weg, so findet man

$$u_n = u_0 \left[1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_1 \left[\binom{n}{1} - \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_2 \left[\binom{n}{2} - \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} - \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_3 \left[\binom{n}{3} - \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{m-3}\binom{m}{m-3}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u_{m-1} \left[\binom{n}{m-1} - \binom{m}{1}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_m \binom{n}{m}.$$

Die aus zwei Factoren zusammengesetzten Glieder der innerhalb der Klammern befindlichen Ausdrücke haben sämmtlich die Form

$$\binom{p}{r}\binom{n}{p},$$

und zwar ist der Unterschied $p - r$ für alle Glieder eines und desselben Ausdruckes dem Zeiger des außerhalb der Klammern stehenden Factors u gleich.

Allein es ist, wenn man statt der Symbole $\binom{p}{r}$, $\binom{n}{p}$ die entsprechenden Werthe setzt,

$$\binom{p}{r}\binom{n}{p} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots p}.$$

Der Zähler $p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)$ des ersten Bruches ist ein Factor des Nenners $1.2.3\ldots p$ des zweiten; folglich hat man nach gehöriger Reduction

$$\binom{p}{r}\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-r)}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-r)} \cdot \frac{(n-p+r)\ldots(n-p+1)}{1\ldots\ldots\ldots r},$$

d. h. es ist

$$\binom{p}{r}\binom{n}{p} = \binom{n}{p-r}\binom{n-(p-r)}{r}.$$

Nimmt man auf diese Transformation Rücksicht, so läßt sich die Gleichung (16) auch so darstellen:

$$u_n = u_0\left[1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^m\binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_1\binom{n}{1}\left[1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}\right]$$
$$+ u_2\binom{n}{2}\left[1 - \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-2}{3} + \ldots + (-1)^{m-2}\binom{n-2}{m-2}\right]$$
$$+ u_3\binom{n}{3}\left[1 - \binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2} - \binom{n-3}{3} + \ldots + (-1)^{m-3}\binom{n-3}{m-3}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u_{m-1}\binom{n}{m-1}\left[1 - \binom{n-m+1}{1}\right]$$
$$+ u_m\binom{n}{m}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von x^r in beiden Theilen der identischen Gleichung $(1+x)^{n-1}(1+x) = (1+x)^n$, oder auch durch unmittelbare Rechnung, ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r},$$

also $$\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{r}.$$

Nun ist $1 - \binom{n}{1} = 1 - n = -\binom{n-1}{1}$, folglich

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n}{2} - \binom{n-1}{1} = \binom{n-1}{2}$$
$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} = -\binom{n}{3} + \binom{n-1}{2} = -\binom{n-1}{3}$$

u. s. w.;

daher allgemein

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m\binom{n}{m} = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

Schreibt man nun hier nach und nach $n-1$, $n-2$, $n-3$, ꝛc. statt n, und $m-1$, $m-2$, $m-3$, ꝛc. statt m, so kann man dem obigen Ausdrucke für u_n folgende Gestalt geben:

$$u_n = (-1)^m\left[\binom{n-1}{m}u_0 - \binom{n}{1}\binom{n-2}{m-1}u_1 + \binom{n}{2}\binom{n-3}{m-2}u_2 - \ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots + (-1)^{m-1}\binom{n}{m-1}\binom{n-m}{1}u_{m-1} + (-1)^m\binom{n}{m}u_m\right].$$

Die numerischen Werthe der Glieder dieser Formel haben die Gestalt

$$\binom{n}{r}\binom{n-(r+1)}{m-r}u_r.$$

Es ist aber

$$\binom{n}{r}\binom{n-(r+1)}{m-r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}\cdot\frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\ldots(m-r)}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1\cdot 2\ldots r}\cdot\frac{1}{n-r}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\ldots m}$$

$$= \binom{m}{r}\cdot\frac{1}{n-r}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

Der letzte Factor ist von r unabhängig, folglich ein gemeinschaftlicher Factor der Glieder des Ausdruckes für u_n. Sondert man denselben von diesen Gliedern ab, und schreibt man zugleich die ganze Formel in verkehrter Ordnung, so hat man

$$(19)\quad u_n = \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\ldots m}\left[\frac{u_m}{n-m} - \frac{\binom{m}{1}u_{m-1}}{n-(m-1)} + \frac{\binom{m}{2}u_{m-2}}{n-(m-2)} - \text{u.} \ldots + \frac{(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}u_1}{n-1} + \frac{(-1)^m u_0}{n}\right].$$

Setzt man hier z. B. $m=4$, so findet man für das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe u_0, u_1, u_2, u_3, u. des vierten Ranges den Ausdruck

$$u_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[\frac{u_4}{n-4} - \frac{4u_3}{n-3} + \frac{6u_2}{n-2} - \frac{4u_1}{n-1} + \frac{u_0}{n}\right].$$

Die Summenformel einer arithmetischen Reihe vom m^{ten} Range ist das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe vom $(m+1)^{ten}$ Range, welche die Nulle zum Anfangsgliede und die gegebene Reihe zur ersten Differenzreihe hat. Es ist daher überflüssig von der Summirung der arithmetischen Reihen besonders zu sprechen.

Vierzigste Vorlesung.

Über die Differenzen der Functionen.

Wenn man in einer Function u einer oder auch mehreren der ihr zum Grunde liegenden veränderlichen Größen, statt der denselben ursprünglich angewiesenen Werthe, nach und nach andere Werthe beilegt, wodurch diese Function aus ihrem anfänglichen Zustande u in u_1, u_2, u_3, u_4, ... übergeht; so heißen die Anfangsglieder der aus der Hauptreihe

$$u, \; u_1, \; u_2, \; u_3, \; u_4, \; \ldots.$$

hervorgehenden Differenzreihen vorzugsweise die Differenzen der Function u, und werden nach ihrer Folge durch die Benennungen: erste, zweite, dritte Differenz u. s. w. von einander unterschieden.

Bezieht sich die Function u bloß auf eine veränderliche Größe x, welche nach und nach in x_1, x_2, x_3, x_4, ... verwandelt wird; ist nämlich $u = f(x)$, also

$$u_1 = f(x_1), \quad u_2 = f(x_2), \quad u_3 = f(x_3), \quad \text{u. s. w.}$$

so sind die Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ... Größen, über deren eigentliche Bedeutung nie ein Zweifel obwalten kann.

Anders verhält sich aber die Sache, wenn der Function u mehrere von einander unabhängige veränderliche Größen x, y, z, ... zugehören. Hier kann eine, oder es können mehrere dieser Größen andere Werthe erhalten. In dieser Hinsicht unterscheidet man die partiellen Differenzen der Function u von den totalen Differenzen derselben. Die ersteren finden Statt, wenn bloß eine bestimmte der in der Function u vorkommenden veränderlichen Größen x, y, z, ..., z. B. bloß x allein, andere Werthe annimmt, während die übrigen, z. B. y, z, ..., ihre vorigen Werthe beibehalten; die letzteren hingegen gehen aus der Änderung aller der Function u zum Grunde liegenden veränderlichen Größen x, y, z, ... hervor. Man könnte, wenn es nöthig wäre, auch von solchen partiellen Differenzen sprechen, welche durch die gleichzeitige Änderung bloß einiger der einer Function angehörenden veränderlichen Größen erzeugt werden; allein es wird sich uns keine Gelegenheit darbieten, davon Gebrauch zu machen. Das Zeichen Δ ohne Beisatz soll immer die totale Differenz einer Function

andeuten; um die partielle Differenz einer Function vorzustellen, wollen wir das Zeichen der geänderten Größe unter das Differenzzeichen Δ schreiben. Es ist also Δu die totale, und $\underset{x}{\Delta} u$ die auf die Änderung von x sich beziehende partielle Differenz von u.

Betrachten wir erstlich bloß Functionen einer veränderlichen Größe. Die Werthe x, x_1, x_2, x_3, ..., welche die Veränderliche x in einer Function $u = f(x)$ erhält, stellen für sich eine Reihe dar, und veranlassen eigene Differenzreihen. Die Anfangsglieder dieser Differenzreihen heißen auf dieselbe Weise nach der Ordnung die erste, zweite, dritte Differenz u. s. w. der veränderlichen Größe x.

Es ist den Ergebnissen der acht und dreißigsten Vorlesung zufolge

$$x_1 = x + \Delta x,$$
$$x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x = (x + \Delta x) + (\Delta x + \Delta^2 x),$$
$$x_3 = x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$$
$$= (x + \Delta x) + 2(\Delta x + \Delta^2 x) + (\Delta^2 x + \Delta^3 x)$$

u. s. w.; es entsteht also x_1 aus x, wenn x in $x + \Delta x$ übergeht; x_2 aus x_1, wenn x in $x + \Delta x$ und zugleich Δx in $\Delta x + \Delta^2 x$; eben so x_3 aus x_2, wenn x in $x + \Delta x$, Δx in $\Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta^2 x$ in $\Delta^2 x + \Delta^3 x$ verwandelt wird, u. s. w.

Da nun nach der oben gewählten Bezeichnung und nach den Formeln der erwähnten Vorlesung

$$\Delta u = u_1 - u, \quad \Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u, \quad \Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u,$$

u. s. w. ist, so kann man auch jedes folgende Glied der Reihe

$$u, \Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \ldots\ldots$$

aus dem vorhergehenden ableiten, wenn man in dem letzteren Gliede überall $x + \Delta x$ statt x, $\Delta x + \Delta^2 x$ statt Δx, $\Delta^2 x + \Delta^3 x$ statt $\Delta^2 x$ u. s. w. setzt, und dieses Glied von dem durch diese Substitutionen erhaltenen Resultate subtrahirt.

Offenbar kommen in $\Delta^r u = \Delta^r . f(x)$ keine höheren Differenzen von x, als die r^{te}, vor. Ist nun, in so fern φ als Functionszeichen gebraucht wird,

$$\Delta^r u = \varphi(x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots . \Delta^r x),$$

so findet man also:

$$(20)\quad \Delta^{r+1} u = \varphi(x + \Delta x, \Delta x + \Delta^2 x, \Delta^2 x + \Delta^3 x, \ldots \Delta^r x + \Delta^{r+1} x)$$
$$- \varphi(x, \Delta x, \Delta^2 x, \ldots . \Delta^r x).$$

Hiedurch wird die Berechnung der höheren Differenzen einer Function mit einer veränderlichen Größe, auf die Berechnung der ersten Differenz einer Function mit mehreren veränderlichen Größen reducirt, denn die Größen x, Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, ꝛc. verhalten sich hier wie von einander independente veränderliche Größen, deren Differenzen Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, $\Delta^4 x$, ꝛc. sind.

Man kann $\Delta^2 x = \Delta^3 x = \Delta^4 x =$ ꝛc. $= 0$ annehmen. In diesem Falle bilden die Werthe x, x_1, x_2, x_3, ... der veränderlichen Größe x eine arithmetische Progression

$$x, \; x + \Delta x, \; x + 2\Delta x, \; x + 3\Delta x, \; \ldots\ldots$$

und man hat bei der Ableitung von $\Delta^{r+1} f(x)$ aus $\Delta^r f(x)$ bloß x als veränderlich, hingegen Δx als constant zu behandeln, wodurch die Rechnung stets bloß eine veränderliche Größe betrifft.

Die Berechnung der totalen Differenzen der Functionen mehrerer veränderlichen Größen läßt sich auf jene der partiellen Differenzen zurückführen.

Es sey u eine Function zweier veränderlicher Größen x und y, nämlich

$$u = f(x, y).$$

Man erhält, wenn man $x_1 = x + \Delta x$ statt x, und gleichzeitig $y_1 = y + \Delta y$ statt y setzt, offenbar denselben geänderten Werth von u, welcher sich ergibt, wenn man zuerst x in $x + \Delta x$, und hernach y in $y + \Delta y$ übergehen läßt. Durch die Änderung von x verwandelt sich u in $u + \underset{x}{\Delta} u$, und diese Größe wird durch die Änderung von y in $u + \underset{x}{\Delta} u + \underset{y}{\Delta}(u + \underset{x}{\Delta} u)$ verwandelt. Da aber offenbar jede Änderung eines Ganzen der algebraischen Summe der Änderungen seiner Theile gleich seyn muß, so hat man

$$\underset{y}{\Delta}(u + \underset{x}{\Delta} u) = \underset{y}{\Delta} u + \underset{y\;x}{\Delta\Delta} u,$$

Hiedurch ergibt sich für den Werth, welchen die Function u bei der gleichzeitigen Änderung von x und y annimmt, der Ausdruck

$$u + \underset{x}{\Delta} u + \underset{y}{\Delta} u + \underset{y\;x}{\Delta\Delta} u,$$

und somit ist die totale Differenz von u selbst, nämlich

$$\Delta u = \underset{x}{\Delta} u + \underset{y}{\Delta} u + \underset{y\;x}{\Delta\Delta} u. \tag{21}$$

Hätte man oben zuerst y in $y + \Delta y$, und dann x in $x + \Delta x$ übergehen lassen, so hätte man

$$\Delta u = \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta_x \Delta_y u$$

gefunden, woraus erhellet, daß

$$(22) \qquad \Delta_x \Delta_y u = \Delta_y \Delta_x u$$

ist. Nimmt man also von einer Function hinter einander zwei partielle Differenzen, die eine in Bezug auf die veränderliche Größe x, die andere in Bezug auf die veränderliche Größe y, so gelangt man stets zu demselben Resultate, in welcher Ordnung man auch immer diese zwei Operationen auf einander folgen läßt.

Der Kürze wegen pflegt man die Größe $\Delta_x \Delta_y u$ als eine zweite Differenz von u zu betrachten, und durch das Zeichen $\Delta^2_{x,y} u$ vorzustellen.

Aus dem hier Gesagten folgt sogleich, daß für eine Function u dreier veränderlicher Größen x, y, z

$$\Delta_x \Delta_y \Delta_z u = \Delta_x \Delta_z \Delta_y u = \Delta_y \Delta_x \Delta_z u = \Delta_y \Delta_z \Delta_x u = \Delta_z \Delta_x \Delta_y u = \Delta_z \Delta_y \Delta_x u$$

seyn muß. Statt $\Delta_x \Delta_y \Delta_z u$ wird $\Delta^3_{x,y,z} u$ geschrieben. Ähnliche Schlüsse gelten für Functionen mehrerer veränderlicher Größen.

Untersuchen wir nun die totale Differenz einer Function u dreier veränderlicher Größen x, y, z. Durch gleichzeitige Veränderung von x und y geht, dem oben Bewiesenen zufolge, u in

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u$$

über. Setzt man noch $z + \Delta z$ statt z, so nimmt u den Werth

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u + \Delta_z [u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u] \text{ an.}$$

Allein es ist aus dem oben angeführten Grunde

$$\Delta_z [u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u] = \Delta_z u + \Delta^2_{x,z} u + \Delta^2_{y,z} u + \Delta^3_{x,y,z} u;$$

daher wird u, indem man gleichzeitig $x + \Delta x$ statt x, $y + \Delta y$ statt y, und $z + \Delta z$ statt z setzt, in

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_z u + \Delta^2_{x,y} u + \Delta^2_{x,z} u + \Delta^2_{y,z} u + \Delta^3_{x,y,z} u$$

umgewandelt, woraus der Werth der totalen Differenz von u, nämlich

$$(23) \qquad \Delta u = \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_z u + \Delta^2_{x,y} u + \Delta^2_{x,z} u + \Delta^2_{y,z} u + \Delta^3_{x,y,z} u$$

folgt.

Man wird in diesem Ausdrucke leicht das in der Bildung der totalen Differenz einer Function beliebig vieler veränderlicher Größen herrschende Gesetz wahrnehmen.

Die hier gefundenen Ausdrücke lassen sich sehr einfach symbolisch darstellen. Es ist nämlich für eine Function u zweier veränderlicher Größen x, y:

$$(24)\qquad \Delta u = [(1+\underset{x}{\Delta})(1+\underset{y}{\Delta})-1]u;$$

für eine Function u dreier veränderlicher Größen x, y, z:

$$(25)\qquad \Delta u = [(1+\underset{x}{\Delta})(1+\underset{y}{\Delta})(1+\underset{z}{\Delta})-1]u$$

u. s. w.,

wenn man die Multiplicationsregeln für Potenzen mit einer in die Augen fallenden Modification auf die Differenzzeichen überträgt.

Da die zweite Differenz $\Delta^2 u$ aus der ersten Δu, ferner die dritte $\Delta^3 u$ aus der zweiten $\Delta^2 u$, und allgemein die r^{te} Differenz $\Delta^r u$ aus der $(r-1)^{ten}$ $\Delta^{r-1} u$ entsteht, wenn man Δu an die Stelle von u treten läßt, so hat man, in so fern z. B. u von drei veränderlichen Größen x, y, z abhängt, die symbolischen Formeln:

$$(26)\qquad \Delta^2 u = [(1+\underset{x}{\Delta})(1+\underset{y}{\Delta})(1+\underset{z}{\Delta})-1]^2 u$$

$$\Delta^3 u = [(1+\underset{x}{\Delta})(1+\underset{y}{\Delta})(1+\underset{z}{\Delta})-1]^3 u$$

u. s. w.;

und allgemein $\Delta^r u = [(1+\underset{x}{\Delta})(1+\underset{y}{\Delta})(1+\underset{z}{\Delta})-1]^r u$, welche Resultate sich leicht auf Functionen mehrerer veränderlicher Größen ausdehnen lassen.

Um diese Formeln auf besondere Fälle anzuwenden, sey erstlich $u = xy$.

Hier ist $\underset{x}{\Delta} u = (x+\Delta x)y - xy = y\Delta x$, und aus demselben Grunde $\underset{y}{\Delta} u = x\Delta y$ und $\underset{x,y}{\Delta^2} u = \Delta x \cdot \Delta y$, folglich

$$(27)\qquad \Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$$

Auf dieselbe Art findet man für $u = xyz$

$$(28)\qquad \Delta(xyz) =$$
$$= yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z + z\Delta x\Delta y + y\Delta x\Delta z + x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y\Delta z$$

u. s. w.

Wir haben hier, indem wir von einer Function mehrerer veränderlicher Größen x, y, z, . . . sprachen, diese Veränderlichen als von einander gänzlich unabhängig betrachtet, so, daß die Änderung einer derselben auf die übrigen Größen keinen Einfluß ausübt, also die Differenzen Δx, Δy, Δz, ... nach Belieben angenommen werden können. Wäre aber y eine Function von x, so würde Δy durch Δx bestimmt, und hörte somit auf willkürlich zu seyn. Da jedoch die Änderung einer Function das Resultat der Änderungen ihrer veränderlichen Bestandtheile ist, so kann die Bildungsweise der Differenz einer Function von x und y aus x, y, Δx, Δy von jener nicht verschieden seyn, welche Statt finden würde, wenn zwischen x und y gar keine Verbindung bestünde. Ein Gleiches gilt, wenn die der Function zum Grunde liegenden veränderlichen Größen x, y, z, ... Functionen gewisser anderer von einander independenter Größen v, w, . . . sind. Es können demnach die obigen zur Berechnung der Differenzen von Functionen mehrerer veränderlicher Größen aufgestellten Formeln selbst bei der Entwickelung der Differenz einer Function mit einer Veränderlichen Nutzen verschaffen, wenn man einzelne Bestandtheile dieser Function, sie mögen durch Addition oder durch Multiplication in dieselbe verflochten seyn, wie abgesonderte veränderliche Größen behandelt.

Wir wollen zum Beschlusse unserer Vorlesung noch die Differenzen einiger häufig vorkommender einfacher Functionen einer veränderlichen Größe nach der aus dem Begriffe einer Differenz sich ergebenden Formel

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

aufsuchen. Es ist

$$(29) \qquad \Delta \,.\, x^m = (x + \Delta x)^m - x^m \; ^{*}),$$

also, wenn der Exponent m eine ganze positive Zahl vorstellt:

$$(30) \quad \Delta \,.\, x^m = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots + \Delta x^m.$$

---

*) Da Δ in Δx kein Factor ist, sondern Δx als ein besonderes Symbol einer Größe betrachtet werden muß, so zeigt Δx^m die mte Potenz von Δx an, und ist mit $(\Delta x)^m$ gleichbedeutend. Um daher die Differenz der mten Potenz von x auszudrücken, schreibt man $\Delta (x^m)$, oder kürzer $\Delta . x^m$. Ein Punct nach dem Differenzenzeichen Δ soll überhaupt darauf aufmerksam machen, daß sich dieses Zeichen auf alle unmittelbar darauf folgenden durch Multiplication mit einander verbundenen Größen bezieht.

Bei derselben Bedeutung von m ist

(31) $\Delta \,.\, x^{-m} = \frac{1}{(x+\Delta x)^m} - \frac{1}{x^m} = - \frac{\Delta \,.\, x^m}{x^m (x+\Delta x)^m}$.

Zeigt a eine unveränderliche Größe an, so ist

(32) $\Delta \,.\, a^x = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$.

Ferner findet man für jedes System

(33) $\Delta . \log . x = \log . (x+\Delta x) - \log . x = \log . \frac{x+\Delta x}{x} = \log . \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Eine leichte Rechnung gibt

(34) $\Delta \sin . x = \sin . (x+\Delta x) - \sin . x = 2 \sin . \tfrac{1}{2}\Delta x \cos . (x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$
$\Delta \cos . x = \cos . (x+\Delta x) - \cos . x = -2 \sin . \tfrac{1}{2}\Delta x \sin . (x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$.

Nimmt man die auf einander folgenden Differenzen einer ganzen rationalen Function der veränderlichen Größe x, nämlich

$u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1} + A_m x^m$,

in so fern man Δx als constant behandelt, so findet man, da diese Function vom m^{ten} Grade ist,

$$\Delta^m u = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \,.\, A_m \,.\, \Delta x^m$$

und $\Delta^{m+1} u = \Delta^{m+2} u = \Delta^{m+3} u = \text{rc.} = 0.$

Ein und vierzigste Vorlesung.

Über die Summen der Functionen.

Wir haben bis jetzt die Functionen als gegebene, und ihre Differenzen als zu suchende Größen betrachtet; man kann aber auch umgekehrt, wenn die Differenz einer Function gegeben ist, die Auffindung der Function selbst zum Gegenstande einer Aufgabe machen.

Die Function, aus welcher eine gegebene Differenz entspringt, heißt die **Summe** dieser Differenz, und wird durch das derselben vorgesetzte Zeichen Σ angedeutet. Diesem gemäß, stellt $\Sigma f(x)$ eine Function von x vor, deren Differenz $= f(x)$ ist.

Es gibt Größen, deren Differenzen gleich Null sind. Dergleichen sind erstlich die beständigen Größen, welche ihrer Natur nach jede Veränderung, also auch die Differenz ausschließen. Allein es lassen sich überdieß noch unzählige Functionen ausfindig machen, deren Differenzen bei jedem Werthe der veränderlichen Größen verschwinden. Solche Functionen sind $\sin.\frac{2\pi x}{\Delta x}$, $\cos.\frac{2\pi x}{\Delta x}$, $y\Delta x - x\Delta y$ u. d. gl., welche offenbar denselben Werth beibehalten, wenn x in $x+\Delta x$, y in $y+\Delta y$ übergeht, und überhaupt alle Functionen, welche man aus derlei Größen wie immer zusammensetzt.

Sind nun zwei Functionen bloß um eine Größe von einander unterschieden, auf deren Werth die vorgenommene Umwandlung der veränderlichen Größen x, y, . . . in $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, ... keinen Einfluß ausübt, so fallen die Differenzen dieser Functionen genau gleich aus. Hieraus folgt, daß der Rückschluß von der Differenz auf die Summe immer das Gepräge der Unbestimmtheit an sich trägt, und man aus der ersteren nur jenen Theil der letzteren mit Gewißheit anzugeben vermag, welcher bei den mit den veränderlichen Größen vorgenommenen Änderungen gleichfalls eine Änderung erleidet. Hat man diesen veränderlichen Theil der Summe bestimmt, so wird man ihm, um die Summe der vorgelegten Differenz vollständig zu erhalten, noch eine unbestimmte Function von der oben erwähnten Beschaffenheit zusetzen, deren Natur den besonderen Umständen der zu lösenden Aufgabe gemäß, auszumitteln ist.

Ertheilt man den veränderlichen Größen, während man die ge-

fundene Summe zu den Zwecken benützt, wegen welcher sie gesucht wurde, bloß solche Werthe, in Bezug auf welche die in der Summe enthaltene unbestimmte Größe stets denselben Werth beibehält; so kann man diese Größe als eine beständige betrachten. Sie wird gewöhnlich die willkürliche Constante genannt, und durch die Sylbe *Const.* bezeichnet. Ist also z. B. $\Delta F(x) = f(x)$, so ist unter der angegebenen Beschränkung im Allgemeinen $\Sigma f(x) = F(x) + Const.$ Diese Constante wird bestimmt, wenn man den Werth kennt, welchen die Summe $\Sigma f(x)$ für irgend einen Werth der veränderlichen x erhält. Wird z. B. für $x = a$, $\Sigma f(x) = b$, so hat man $b = F(a) + Const.$, also $Const. = b - F(a)$, und daher $\Sigma f(x) = F(x) - F(a) + b$.

Wir wollen nun die Summen einiger der einfachsten Functionen kennen lernen, und zu diesem Ende mit den Functionen einer veränderlichen Größe den Anfang machen. Der unbestimmte Theil jeder Summe soll stets als eine Constante betrachtet werden.

Bei der Aufsuchung der Summen ist die Bemerkung nützlich, daß die Summe einer aus mehreren Theilen bestehenden Function erhalten wird, wenn man die Summen der einzelnen Theile sucht, und dieselben addirt. Auch überzeugt man sich leicht, daß ein beständiger Factor einer Function ein Factor ihrer Summe seyn muß.

Es ist dem Begriffe einer Summe gemäß

$$\Sigma \Delta x = x + Const.$$

Da aber Δx von x nicht abhängt, so kann man, in so fern man bloß x als veränderlich ansieht, $\Delta x \Sigma 1$ statt $\Sigma \Delta x$ schreiben. Demnach ist

$$\Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x} + \frac{Const.}{\Delta x};$$

oder, wenn man, was offenbar erlaubt ist, *Const.* statt $\frac{Const.}{\Delta x}$ setzt:

$$\Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x} + Const.$$

Hiedurch ist man im Stande, die Summe jeder beständigen Größe A anzugeben. Man hat nämlich

$$(35) \qquad \Sigma A = A \Sigma 1 = \frac{A x}{\Delta x} + Const.$$

Ferner ist $\Delta . x^2 = 2 x \Delta x + \Delta x^2$, folglich

$$x^2 + Const. = 2 \Delta x \Sigma x + \Delta x^2 \Sigma 1, \text{ d. h.}$$

$$(36) \qquad \Sigma x = \frac{x^2}{2 \Delta x} - \frac{x}{2} + Const.$$

Auf dieselbe Art ergibt sich aus $\Delta . x^3 = 3x^2 \Delta x + 3 x \Delta x^2 + \Delta x^3$

$$(37) \qquad \Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \Delta x}{6} + Const.$$

u. s. w.; welche Formeln wir jedoch, da sie uns zu einer besonderen Vorlesung Stoff darbieten, hier nicht weiter verfolgen wollen.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung $\Delta . a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$ gefunden. Hieraus folgt $a^x = (a^{\Delta x} - 1) \Sigma a^x$ *), also

$$(38) \qquad \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x} - 1} + Const.$$

Aus der Gleichung $\Delta \log. x = \log. \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ erhält man

$$\Sigma \log. \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log. x + Const.$$

Man kann jede beständige Größe als den Logarithmus einer anderen Constanten in jedem beliebigen Systeme betrachten. Setzt man daher in der letzteren Gleichung $\log. C$ statt $Const.$, so hat man

$$(39) \qquad \Sigma \log. \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log. Cx.$$

Die Formeln

$$\Delta \sin. x = 2 \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x . \cos. (x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$
$$\Delta \cos. x = -2 \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x . \sin. (x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

geben

$$\Sigma \sin. (x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = - \frac{\cos. x}{2 \sin. \frac{1}{2}\Delta x} + Const.$$
$$\Sigma \cos. (x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = \frac{\sin. x}{2 \sin. \frac{1}{2}\Delta x} + Const.;$$

oder, wenn man, was hier offenbar erlaubt ist, $x - \frac{1}{2}\Delta x$ statt x setzt:

$$(40) \qquad \Sigma \sin. x = - \frac{\cos. (x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin. \frac{1}{2}\Delta x} + Const.$$

$$(41) \qquad \Sigma \cos. x = \frac{\sin. (x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin. \frac{1}{2}\Delta x} + Const.$$

---

*) Bey den Summen bezieht man die Exponenten immer auf die Größen unter dem Summenzeichen, daher ist Σa^x einerlei mit $\Sigma(a^x)$, nicht aber mit $(\Sigma a)^x$.

Die Summen der Functionen lassen sich bei der Summirung der Reihen mit Vortheil verwenden.

Es ist $\Sigma f(x)$ eine Function der Veränderlichen x, deren Differenz in Bezug auf diese Veränderliche $= f(x)$ ist, daher muß

(42) $$\Sigma f(x+\Delta x) - \Sigma f(x) = f(x),$$ folglich

(43) $$\Sigma f(x+\Delta x) = f(x) + \Sigma f(x)$$ seyn.

Setzt man in dieser Gleichung $x-\Delta x$ statt x, so ergibt sich

$$\Sigma f(x) = f(x-\Delta x) + \Sigma f(x-\Delta x),$$

woraus auf dieselbe Art

$$\Sigma f(x-\Delta x) = f(x-2\Delta x) + \Sigma f(x-2\Delta x)$$
$$\Sigma f(x-2\Delta x) = f(x-3\Delta x) + \Sigma f(x-3\Delta x)$$
u. s. w.

folgt. Substituirt man statt der Summen die gleichgeltenden Ausdrücke, so wird

(44) $$\Sigma f(x) = f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x) + f(x-3\Delta x) + \ldots\ldots + f(x-n\Delta x) + \Sigma f(x-n\Delta x).$$

Wird $\Sigma f(x)$ so bestimmt, daß $\Sigma f(x-n\Delta x)$ verschwindet, was immer mit Hülfe der willkürlichen Constante geschehen kann, so hat man

(45) $$\Sigma f(x) = f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x) + f(x-3\Delta x) + \ldots\ldots + f(x-n\Delta x),$$

welche Gleichung die Summe der Reihe

$$f(x-\Delta x),\ f(x-2\Delta x),\ f(x-3\Delta x),\ \ldots\ f(x-n\Delta x)$$

darstellt. Man kann ihr noch verschiedene andere Gestalten geben. Setzt man z. B. $x+n\Delta x$ statt x, und schreibt man ihre Glieder in verkehrter Ordnung, so wird

(46) $$\Sigma f(x+n\Delta x) = f(x) + f(x+\Delta x) + f(x+2\Delta x) + \ldots\ldots + f[x+(n-1)\Delta x],$$

wobei die Summe $\Sigma f(x+n\Delta x)$ so zu bestimmen ist, daß sie für $n=0$ verschwindet, damit nämlich $\Sigma f(x) = 0$ werde.

Ein besonderer Fall der letzteren Formel, jener nämlich, wenn $x=1$ und $\Delta x = 1$ ist, verdient eine nähere Betrachtung. Dann hat man

(47) $$\Sigma f(n+1) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots + f(n),$$

wobei $\Sigma f(n+1)$ so bestimmt werden muß, daß $\Sigma f(1) = 0$ wird. Aber $f(n)$ stellt das allgemeine, oder dem unbestimmten Zeiger n entspre-

chende Glied jeder denkbaren Reihe vor, daher ist $\Sigma f(n+1)$ die Summenformel derselben Reihe. So wie wir hier gefunden haben, daß $\Sigma f(n+1)$ für $n=0$ verschwinden muß, wenn die zu summirende Parthie der Reihe mit dem Gliede, dessen Zeiger 1 ist, anheben soll, eben so läßt sich auch leicht zeigen, daß $\Sigma f(n+1)$ für $n=k-1$ gleich Null werden muß, wenn dadurch die Summe

$$f(k)+f(k+1)+f(k+2)+\ldots+f(n)$$

auszudrücken ist. Man vergleiche hiemit, was in der dritten Vorlesung über diesen Gegenstand gesagt wurde.

Es sey z. B. die geometrische Progression

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \ldots\ aq^{n-1}$$

zu summiren. Setzen wir $f(n)=aq^{n-1}$, so haben wir

$$f(n+1)=aq^n \quad \text{und} \quad \Sigma f(n+1)=a\Sigma q^n.$$

Die Formel (38) gibt, wenn man daselbst n statt x, q statt a, und die Einheit statt Δx setzt,

$$\Sigma q^n = \frac{q^n}{q-1} + Const.,$$

$$\text{also} \quad \Sigma f(n+1) = \frac{a q^n}{q-1} + Const.$$

Da $\Sigma f(n+1)$ für $n=0$ den Werth Null erhalten soll, so hat man, wenn man in dieser Gleichung n verschwinden läßt,

$$0 = \frac{a}{q-1} + Const., \quad \text{also} \quad Const. = -\frac{a}{q-1}$$

$$\text{und} \quad \Sigma f(n+1) = \frac{a(q^n-1)}{q-1},$$

welches Resultat mit der bekannten Summenformel der geometrischen Progression übereinstimmt.

Soll die Summe einer Reihe von Sinussen gefunden werden, deren Bogen in arithmetischer Progression fortschreiten, nämlich

$$\sin. x+\sin.(x+\Delta x)+\sin.(x+2\Delta x)+\ldots+\sin.[x+(n-1)\Delta x],$$

so kann man von der Formel (46) Gebrauch machen. Setzt man daselbst $f(x)=\sin. x$, so wird die zu suchende Summe durch den Ausdruck $\Sigma \sin.(x+n\Delta x)$ angegeben, wenn derselbe für $n=0$ verschwindet. Vermöge (40) ist, wenn man $x+n\Delta x$ statt x setzt,

$$\Sigma \sin.(x+n\Delta x) = -\frac{\cos.[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + Const.$$

Da diese Summe für $n = 0$ verschwinden soll, so hat man

$$0 = -\frac{\cos.(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + Const., \text{ folglich}$$

$$\Sigma \sin.(x + n\Delta x) = \frac{\cos.(x - \frac{1}{2}\Delta x) - \cos.[x + (n - \frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$= \frac{\sin.\frac{1}{2}n\Delta x \,.\, \sin.[x + \frac{1}{2}(n-1)\Delta x]}{\sin.\frac{1}{2}\Delta x},$$

welches Resultat mit der Formel (110) der zwanzigsten Vorlesung einerlei ist.

Wir wollen nun die Summen der einfachsten Functionen zweier veränderlicher Größen x und y kennen lernen.

Es ist $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$, folglich

$$\Sigma(\Delta x + \Delta y) = x + y + Const.$$

Sieht man Δx und Δy als beständige Größen an, so kann man $\Sigma(\Delta x + \Delta y) = (\Delta x + \Delta y)\Sigma 1$ setzen, daher hat man

$$\Sigma 1 = \frac{x + y}{\Delta x + \Delta y} + Const., \text{ und für jede beständige Größe } A$$

$$\Sigma A = \frac{A(x + y)}{\Delta x + \Delta y} + Const.$$

Ferner ist $\Delta(x^2 + y) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta y$, folglich

$$2\Delta x \Sigma x + (\Delta x^2 + \Delta y)\Sigma 1 = x^2 + y + Const.$$

und

$$(48) \qquad \Sigma x = \frac{x^2 + y - (\Delta x^2 + \Delta y)\Sigma 1}{2\Delta x} + Const.$$

Auf dieselbe Art findet man, von $\Delta(x + y^2)$ ausgehend,

$$\Sigma y = \frac{x + y^2 + (\Delta x + \Delta y^2)\Sigma 1}{2\Delta y} + Const.$$

Legt man aber die Gleichungen

$$\Delta(x^3 + y) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta y$$

$$\Delta(x^2 y) = 2xy\Delta x + y\Delta x^2 + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y$$

u. d. gl.

zum Grunde, so erhält man die Werthe von Σx^2, Σxy u. d. gl.

Es ist ferner $\Delta^2_{x,y} . xy = \Delta x \Delta y$. Nimmt man beiderseits die Summen in Bezug auf x, indem man die Veränderlichkeit von y nicht beachtet, was durch das Zeichen Σ_x angedeutet werden soll, so hat man

$$\Delta x \Delta y \Sigma_x 1 = \Delta_y (xy + Const.).$$

Die Constante kann hier y enthalten, da y selbst als beständig betrachtet wurde, daher ist statt der Constante eine unbestimmte Function von y zu setzen, die wir durch $\varphi(y)$ anzeigen wollen, und somit hat man:

$$\Delta x \Delta y \underset{x}{\Sigma} 1 = \underset{y}{\Delta} [xy + \varphi(y)].$$

Summirt man nun noch in Bezug auf y, so ergibt sich

$$\Delta x \Delta y \underset{x,y}{\Sigma^2} 1 = xy + \varphi(y) + \psi(x),$$

wobei $\psi(x)$ eine unbestimmte Function von x anzeigt.

Hieraus folgt

$$(49) \qquad \underset{x,y}{\Sigma^2} 1 = \frac{xy}{\Delta x \Delta y} + \varphi(y) + \psi(x),$$

wenn man nämlich $\varphi(y)$ und $\psi(x)$ statt $\frac{\varphi(y)}{\Delta x \Delta y}$ und $\frac{\psi(x)}{\Delta x \Delta y}$ schreibt, was wegen der Unveränderlichkeit von Δx und Δy, und wegen der Unbestimmtheit der durch φ und ψ angedeuteten Functionen erlaubt ist.

Auf dieselbe Art folgt aus

$$\underset{x,y}{\Delta^2} . x^2 y = 2x\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y$$

$$(50) \qquad \underset{x,y}{\Sigma^2} x = \frac{x^2 y}{2\Delta x \Delta y} - \frac{\Delta x}{2} \underset{x,y}{\Sigma^2} 1 + \varphi(y) + \psi(x)$$

u. s. f.

Endlich bemerken wir noch, daß

$$(51) \quad \Sigma f(x, y) = f(x-\Delta x, y-\Delta y) + f(x-2\Delta x, y-2\Delta y) + f(x-3\Delta x, y-3\Delta y) + \ldots\ldots + f(x-n\Delta x, y-n\Delta y) + \Sigma f(x-n\Delta x, y-n\Delta y)$$

und

$$\begin{aligned}(52) \quad \underset{x,y}{\Sigma^2} f(x, y) = {} & f(x-\Delta x, y-\Delta y) + f(x-\Delta x, y-2\Delta y) \\ & + f(x-\Delta x, y-3\Delta y) + \ldots + f(x-\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + \underset{y}{\Sigma} f(x-\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + f(x-2\Delta x, y-\Delta y) + f(x-2\Delta x, y-2\Delta y) \\ & + f(x-2\Delta x, y-3\Delta y) + \ldots + f(x-2\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + \underset{y}{\Sigma} f(x-2\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + \text{ꝛc.} \\ & + f(x-m\Delta x, y-\Delta y) + f(x-m\Delta x, y-2\Delta y) \\ & + f(x-m\Delta x, y-3\Delta y) + \ldots + f(x-m\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + \underset{y}{\Sigma} f(x-m\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + \underset{x,y}{\Sigma^2} f(x-m\Delta x, y-n\Delta y)\end{aligned}$$

ist. Die erstere dieser Formeln folgt aus der Gleichung

$$\Sigma f(x, y) - \Sigma f(x - \Delta x, y - \Delta y) = f(x - \Delta x, y - \Delta y),$$

und die letztere aus

$$\Sigma^2_{x,y} f(x, y) - \Sigma^2_{x,y} f(x - \Delta x, y) = \Sigma_{y} f(x - \Delta x, y),$$

indem man jede dieser Gleichungen auf die in denselben erscheinenden Summen fortwährend anwendet.

Die Gleichung (52) dient zur Summirung der Doppelreihen. Daß die Functionen dreier und mehrerer veränderlicher Größen zu ähnlichen Betrachtungen Veranlassung geben können, bedarf keiner Erinnerung.

Zwei und vierzigste Vorlesung.

Über die höheren Differenzen und über die Summirung der Potenzen einer veränderlichen Größe mit ganzen positiven Exponenten.

Es sey die r^{te} Differenz der Potenz x^m zu entwickeln, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, und Δx als constant betrachtet wird. Dieselbe ist das erste Glied der r^{ten} Differenzreihe für die Hauptreihe

$$x^m,\ (x+\Delta x)^m,\ (x+2\Delta x)^m,\ (x+3\Delta x)^m, \ldots (x+r\Delta x)^m, \ldots$$

folglich

$$(53)\quad \Delta^r . x^m = (x+r\Delta x)^m - \binom{r}{1}[x+(r-1)\Delta x]^m + \binom{r}{2}[x+(r-2)\Delta x]^m - \ldots \ldots + (-1)^r x^m.$$

Entwickelt man die Potenzen der Binome, und nimmt man die mit gleichnamigen Potenzen von x versehenen Glieder zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta^r . x^m = &\left[1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r\right] x^m \\ &+\left[r - \binom{r}{1}(r-1) + \binom{r}{2}(r-2) - \binom{r}{3}(r-3) + \ldots + (-1)^r . 0\right]\binom{m}{1} x^{m-1}\Delta x \\ &+\left[r^2 - \binom{r}{1}(r-1)^2 + \binom{r}{2}(r-2)^2 - \binom{r}{3}(r-3)^2 + \ldots + (-1)^r . 0^2\right]\binom{m}{2} x^{m-2}\Delta x^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left[r^m - \binom{r}{1}(r-1)^m + \binom{r}{2}(r-2)^m - \binom{r}{3}(r-3)^m + \ldots + (-1)^r . 0^m\right]\Delta x^m.\end{aligned}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist mit $(1-1)^r x^m$ gleichbedeutend, und deßhalb $= 0$; denn r ist eine ganze positive von 0 verschiedene Zahl. Das allgemeine Glied desselben aber hat die Form

$$\left[r^w - \binom{r}{1}(r-1)^w + \binom{r}{2}(r-2)^w - \binom{r}{3}(r-3)^w + \ldots \ldots + (-1)^r . 0^w\right]\binom{m}{w} x^{m-w}\Delta x^w,$$

und kann, da die Größe innerhalb der Klammern offenbar das erste Glied der r^{ten} Differenzreihe für die Hauptreihe

$$0^w,\ 1^w,\ 2^w,\ 3^w, \ldots (r-2)^w,\ (r-1)^w,\ r^w, \ldots$$

ist, durch

$$\Delta^r(o^w) \cdot \binom{m}{w} x^{m-w} \Delta x^w$$

angedeutet werden. Aus der neun und dreißigsten Vorlesung erhellet, daß $\Delta^r(o^w)$ verschwindet, so lange w kleiner ist als r, und daß diese Größe für $w = r$ dem Producte $1.2.3....(r-1)r$ gleich kommt. Es handelt sich also nur noch um eine bequeme Methode, die Werthe von $\Delta^r(o^{r+1})$, $\Delta^r(o^{r+2})$, $\Delta^r(o^{r+3})$, ... zu berechnen. Hiezu dienen folgende Betrachtungen.

Sondert man in der Formel

$$\Delta^r(o^w) = r^w - \binom{r}{1}(r-1)^w + \binom{r}{2}(r-2)^w - \binom{r}{3}(r-3)^w + \ldots\ldots + (-1)^r o^w$$

von den Potenzen r^w, $(r-1)^w$, $(r-2)^w$, $(r-3)^w$, ... einen Factor ab, um das zugehörige Glied wirklich damit zu multipliciren, so ergibt sich:

$$\Delta^r(o^w) =$$

$$= r\left[r^{w-1} - \binom{r}{1}(r-1)^{w-1} + \binom{r}{2}(r-2)^{w-1} - \binom{r}{3}(r-3)^{w-1} + \ldots + (-1)^r o^{w-1}\right]$$

$$+ \binom{r}{1}(r-1)^{w-1} - 2\binom{r}{2}(r-2)^{w-1} + 3\binom{r}{3}(r-3)^{w-1} - \ldots - (-1)^{r-1} o^{w-1}.$$

Aber dem Bildungsgesetze der Binomialcoefficienten zu Folge ist $\binom{r}{1} = r$, $2\binom{r}{2} = r\binom{r-1}{1}$, $3\binom{r}{3} = r\binom{r-1}{2}$, rc. und allgemein $p\binom{r}{p} = r\binom{r-1}{p}$, daher hat man

$$\Delta^r(o^w) =$$

$$r\left\{\begin{array}{l} r^{w-1} - \binom{r}{1}(r-1)^{w-1} + \binom{r}{2}(r-2)^{w-1} - \binom{r}{3}(r-3)^{w-1} + \ldots + (-1)^r o^{w-1} \\ + (r-1)^{w-1} - \binom{r-1}{1}(r-2)^{w-1} + \binom{r-1}{2}(r-3)^{w-1} - \ldots - (-1)^r o^{w-1} \end{array}\right\}$$

folglich

$$(54) \qquad \Delta^r(o^w) = r\left[\Delta^r(o^{w-1}) + \Delta^{r-1}(o^{w-1})\right].$$

Diese einfache Gleichung macht es möglich, die Werthe von $\Delta^r(o^w)$ für alle Abstufungen der Zahlen r und w stufenweise zu berechnen, und in eine Tabelle zusammen zu stellen, wovon folgendes Schema den Anfang enthält:

	0^1	0^2	0^3	0^4	0^5	0^6
Δ^1	1	1	1	1	1	1
Δ^2	0	2	6	14	30	62
Δ^3	0	0	6	36	150	540
Δ^4	0	0	0	24	240	1560
Δ^5	0	0	0	0	120	1800
Δ^6	0	0	0	0	0	720

u. s. w. (rechts neben der Tabelle)

u. s. w.

Jede Zahl in dieser Tabelle wird erhalten, wenn man die ihr in horizontaler Richtung vorhergehende zu der dieser letzteren in verticaler Richtung vorhergehenden addirt, und die Summe mit dem Zeiger der Horizontal-Columne, in welche die zu suchende Zahl kommen soll, multiplicirt. Aus dem unveränderlichen Gange der Rechnung, durch welche diese Tabelle entsteht, könnte man auch, wenn man es nicht bereits wüßte, folgern, daß $\Delta^r(0^w)$ für $w \gtrless r$ gleich Null, und für $w = r$ dem Producte $1.2.3....(r-1)r$ gleich wird.

Wir haben somit

$$(55) \quad \Delta^r . x^m = \Delta^r(0^r) . \binom{m}{r} x^{m-r} \Delta x^r + \Delta^r(0^{r+1}) . \binom{m}{r+1} x^{m-r-1} \Delta x^{r+1} + \Delta^r(0^{r+2}) . \binom{m}{r+2} x^{m-r-2} \Delta x^{r+2} + \ldots + \Delta^r(0^m) . \Delta x^m.$$

Für $r = m$ gibt diese Formel

$$\Delta^m . x^m = \Delta^m(0^m) . \Delta x^m = 1 . 2 . 3 \ldots (m-1) m . \Delta x^m,$$

und für $r > m$, $\Delta^r . x^m = 0$, was wir bereits früher gefunden haben.

Die Zahlen von der Form $\Delta^r(0^w)$ kommen bei analytischen Untersuchungen häufig vor, und leisten dabei wesentliche Dienste. In enger Verbindung mit ihnen stehen die Zahlen von der Form $\Delta^r(1^w)$. Offenbar ist $\Delta^r(1^w) = \Delta^r(0^w) + \Delta^{r+1}(0^w)$; aber vermög (54) haben wir $\Delta^r(0^w) + \Delta^{r+1}(0^w) = \frac{\Delta^{r+1}(0^{w+1})}{r+1}$, folglich

$$(56) \qquad \Delta^r(1^w) = \frac{\Delta^{r+1}(0^{w+1})}{r+1}.$$

Wenden wir uns nun zu der Bestimmung von Σx^m.

Es ist $\Delta . x^{m+1} = (x + \Delta x)^{m+1} - x^{m+1}$; folglich, wenn m eine ganze positive Zahl vorstellt:

$$\Delta . x^{m+1} = \binom{m+1}{1} x^m \Delta x + \binom{m+1}{2} x^{m-1} \Delta x^2 + \binom{m+1}{3} x^{m-2} \Delta x^3 + \ldots \ldots + \Delta x^{m+1}.$$

Nimmt man beiderseits die Summen in Bezug auf die veränderliche Größe x, während man Δx als beständig betrachtet, so ergibt sich

$$(57)\quad x^{m+1} = \binom{m+1}{1} \Delta x \Sigma x^m + \binom{m+1}{2} \Delta x^2 \Sigma x^{m-1} + \binom{m+1}{3} \Delta x^3 \Sigma x^{m-2} + \ldots \ldots + \Delta x^{m+1} \Sigma 1;$$

und wegen

$$\binom{m+1}{1} = m + 1, \quad \binom{m+1}{2} = \frac{m+1}{2}\binom{m}{1}, \quad \binom{m+1}{3} = \frac{m+1}{3}\binom{m}{2}$$

u. s. w.

$$(58)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{2}\binom{m}{1} \Delta x \Sigma x^{m-1} - \frac{1}{3}\binom{m}{2} \Delta x^2 \Sigma x^{m-2} - \ldots \ldots - \frac{1}{m+1} \Delta x^m \Sigma 1.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung läßt sich Σx^m berechnen, wenn die niedrigeren Summen Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, ... bereits gefunden sind. Nun ist $\Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x} + Const.$, folglich erhält man

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2 \Delta x} - \frac{1}{2} \Delta x \Sigma 1 = \frac{x^2}{2 \Delta x} - \frac{x}{2} + Const.$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3 \Delta x} - \frac{1}{2} . 2 \Delta x \Sigma x - \frac{1}{3} \Delta x^2 \Sigma 1$$

$$= \frac{x^3}{3 \Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \Delta x}{6} + Const.$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4 \Delta x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \Delta x}{4} + Const.$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5 \Delta x} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3 \Delta x}{3} - \frac{x \Delta x^3}{30} + Const.$$

u. s. w.

Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke wird ersichtlich, wenn man in der Formel (58) nach und nach $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... statt m schreibt, und die hiedurch erhaltenen Ausdrücke sogleich in eben dieselbe Formel substituirt. Um in dieses Geschäft Ordnung zu bringen, kann man sich der Eliminationsmethode durch unbestimmte Multiplicatoren bedienen.

Der Gleichung (57) zu Folge ist nämlich

$$(59)\quad o = x^{m+1} - \binom{m+1}{1}\Delta x \Sigma x^m - \binom{m+1}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-1} - \binom{m+1}{3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-2} - \ldots\ldots - \Delta x^{m+1}\Sigma 1.$$

Setzt man hier allgemein $m-r$ statt m, wobei r kleiner gedacht wird als m, so hat man

$$o = x^{m-r+1} - \binom{m-r+1}{1}\Delta x \Sigma x^{m-r} - \binom{m-r+1}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-r-1} - \binom{m-r+1}{3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-r-2} - \ldots\ldots - \Delta x^{m-r+1}\Sigma 1;$$

und wenn man diese Gleichung mit $\frac{1}{r}\binom{m}{r-1}\Delta x^{r-1}$ multiplicirt, wegen

$$\frac{1}{r}\binom{m}{r-1}\binom{m-r+1}{w} = \binom{r+w}{r}\cdot\frac{1}{r+w}\binom{m}{r+w-1}$$

$$(60)\quad o = \frac{1}{r}\binom{m}{r-1}x^{m-r+1}\Delta x^{r-1} - \binom{r+1}{r}\cdot\frac{1}{r+1}\binom{m}{r}\Delta x^r \Sigma x^{m-r} - \binom{r+2}{r}\cdot\frac{1}{r+2}\binom{m}{r+1}\Delta x^{r+1}\Sigma x^{m-r-1} - \binom{r+3}{r}\cdot\frac{1}{r+3}\binom{m}{r+2}\Delta x^{r+2}\Sigma x^{m-r-2} - \text{etc.}$$

Setzt man hier nach und nach $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$ so hat man nebst der Formel (58) noch die Gleichungen

$$o = x^m - \binom{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\binom{m}{1}\Delta x \Sigma x^{m-1} - \binom{3}{1}\cdot\frac{1}{3}\binom{m}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-2} - \binom{4}{1}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-3} - \text{etc.}$$

$$o = \frac{1}{2}\binom{m}{1}x^{m-1}\Delta x - \binom{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\binom{m}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-2} - \binom{4}{2}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-3} - \text{etc.}$$

$$o = \frac{1}{3}\binom{m}{2}x^{m-2}\Delta x^2 - \binom{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-3} - \ldots.$$

$$o = \frac{1}{4}\binom{m}{3}x^{m-3}\Delta x^3 - \ldots.$$

u. s. w.

Man multiplicire diese Gleichungen nach der Reihe mit den vor der Hand noch unbestimmten Zahlen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ addire sie sodann zu der Gleichung (58), und setze

$$(61) \quad 1 + \binom{2}{1} A_1 = 0$$

$$1 + \binom{3}{1} A_1 + \binom{3}{2} A_2 = 0$$

$$1 + \binom{4}{1} A_1 + \binom{4}{2} A_2 + \binom{4}{3} A_3 = 0$$

u. s. w., und allgemein

$$1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \binom{r}{3} A_3 + \ldots + \binom{r}{r-1} A_{r-1} = 0,$$

so hat man

$$(62) \qquad \Sigma x^m =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} + A_1 x^m + A_2 \cdot \frac{1}{2}\binom{m}{1} x^{m-1}\Delta x + A_3 \cdot \frac{1}{3}\binom{m}{2} x^{m-2}\Delta x^2$$

$$+ A_4 \cdot \frac{1}{4}\binom{m}{3} x^{m-3}\Delta x^3 + \ldots + A_m x \Delta x^{m-1}.$$

Die Werthe der Zahlen A_1, A_2, A_3 werden aus den Gleichungen (61), da sie sämmtlich vom ersten Grade sind, und jede folgende nur eine unbekannte Größe mehr enthält als die nächstvorhergehende, leicht berechnet. Folgende Betrachtungen werden dabei dienlich seyn.

Man behandle die Gleichungen (61) wie die Glieder einer Reihe, deren Differenzreihen zu suchen sind, so werden zur Bildung der w^{ten} Differenz für

$$1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \binom{r}{3} A_3 + \ldots + \binom{r}{r-1} A_{r-1} = 0$$

die nächsten w darauf folgenden Gleichungen, wovon

$$1 + \binom{r+w}{1} A_1 + \binom{r+w}{2} A_2 + \binom{r+w}{3} A_3 + \ldots + \binom{r+w}{r-1} A_{r-1}$$

$$+ \binom{r+w}{r} A_r + \ldots + \binom{r+w}{r+w-1} A_{r+w-1} = 0$$

die letzte ist, in Anspruch genommen. Da die derselben vorangehenden w Gleichungen weniger Glieder enthalten, so setze man denselben die fehlenden Zahlen A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, ... mit der Nulle multiplicirt zu, so daß alle $w+1$ Gleichungen aus gleich viel Gliedern bestehen. Stellt man nun die erste dieser Gleichungen unter der Form

$$1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \binom{r}{3} A_3 + \ldots + \binom{r}{r-1} A_{r-1}$$

$$+ \overset{1}{0} A_r + \overset{2}{0} A_{r+1} + \overset{3}{0} A_{r+2} + \ldots + \overset{w}{0} A_{r+w-1} = 0$$

vor, wobei die Zeiger ober den Nullen der Unterscheidung willen gebraucht werden, so ist ihre w^{te} Differenz

$$A_1 \Delta^w \binom{r}{1} + A_2 \Delta^w \binom{r}{2} + A_3 \Delta^w \binom{r}{3} + \ldots + A_{r-1} \Delta^w \binom{r}{r-1}$$
$$+ A_r \Delta^w \overset{1}{o} + A_{r+1} \Delta^w \overset{2}{o} + \ldots + A_{r+t-1} \Delta^w \overset{t}{o} + \ldots + A_{r+w-1} \Delta^w \overset{w}{o} = 0.$$

Die Differenzen beziehen sich hier auf die veränderliche r unter der Voraussetzung $\Delta r = 1$.

Nun ist überhaupt $\Delta \binom{r}{k} = \binom{r+1}{k} - \binom{r}{k} = \binom{r}{k-1}$, folglich $\Delta^2 \binom{r}{k} = \Delta \binom{r}{k-1} = \binom{r}{k-2}$; $\Delta^3 \binom{r}{k} = \binom{r}{k-3}$, und allgemein

$$\text{(63)} \qquad \Delta^w \binom{r}{k} = \binom{r}{k-w};$$

woraus erhellet, daß $\Delta^w \binom{r}{k}$ verschwindet, sobald $w > k$ ist. Ferner hat man, weil der obigen Bezeichnung gemäß $\Delta^w \overset{t}{o}$ das erste Glied der w^{ten} Differenzreihe einer Hauptreihe vorstellt, welche mit t Nullen anfängt, und deren folgende Glieder

$$\binom{r+t}{r+t-1},\ \binom{r+t+1}{r+t-1},\ \binom{r+t+2}{r+t-1},\ \ldots\ \binom{r+w}{r+t-1}$$

sind,

$$\Delta^w \overset{t}{o} = \binom{r+w}{r+t-1} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{r+t-1} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{r+t-1} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{w-t}\binom{w}{w-t}\binom{r+t}{r+t-1}.$$

Drückt man $\Delta^w \binom{r}{k}$ nach der Formel (6) aus, so hat man, mit Berücksichtigung des oben gefundenen Werthes dieser Größe, die Gleichung

$$\text{(64)} \quad \binom{r+w}{k} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{k} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{k} - \ldots + (-1)^w \binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}.$$

Setzt man hier $k = r+t-1$, so ergibt sich, da der erste Theil dieser Gleichung, wegen dem Verschwinden der Binomialcoefficienten mit negativen Zeigern nur bis zu dem Gliede

$$\binom{w}{w-t+1}\binom{r+t-1}{r+t-1} = \binom{w}{w-t+1}$$

fortgesetzt werden kann, die Gleichung

$$\binom{r+w}{r+t-1} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{r+t-1} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{r+t-1} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{w-t}\binom{w}{w-t}\binom{r+t}{r+t-1} + (-1)^{w-t+1}\binom{w}{w-t+1} =$$
$$= \binom{r}{r+t-1-w} = \binom{r}{w-t+1},$$

folglich

$$\Delta^w \overset{t}{o} = \binom{r}{w-t+1} + (-1)^{w-t}\binom{w}{w-t+1}.$$

Nach gehöriger Berücksichtigung dieser Resultate findet man für die w^{te} Differenz, auf welche die letzte der Gleichungen (61) führt, folgenden Ausdruck:

$$(65)\quad A_w + \binom{r}{1} A_{w+1} + \binom{r}{2} A_{w+2} + \binom{r}{3} A_{w+3} + \ldots + \binom{r}{r-w-1} A_{r-1}$$
$$+ \left[\binom{r}{w} - (-1)^w\right] A_r + \left[\binom{r}{w-1} + (-1)^w \binom{w}{w-1}\right] A_{r+1}$$
$$+ \left[\binom{r}{w-2} - (-1)^w \binom{w}{w-2}\right] A_{r+2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left[\binom{r}{1} + \binom{w}{1}\right] A_{r+w-1} = 0.$$

Diese Gleichung gibt den Werth von A_{r+w-1}, wenn alle vorhergehenden Werthe von A_{r+w-2} angefangen bis A_w bekannt sind.

Es sey in (65) $r = w = n$, also $r + w - 1 = 2n - 1$. Dann kommen daselbst bloß jene der Größen A_1, A_2, A_3, ... vor, deren Zeiger ungerade sind, und zwischen die Grenzen n und $2n - 1$ fallen. Läßt man $n = 2$ seyn, so findet man $3A_3 = 0$ oder $A_3 = 0$; daher müssen, wie man leicht sieht, wenn man nach und nach $n = 3, 4, 5, \ldots$ annimmt, alle Zahlen, welche durch A mit ungeraden und die Einheit übersteigenden Zeigern vorgestellt werden, verschwinden.

Setzt man in (65) $w = n$ und $r = n + 1$, also $r + w - 1 = 2n$, und hernach insbesondere $n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man ein System von Gleichungen, welches mit Zuziehung der Gleichung $1 + \binom{2}{1} A_1 = 0$ zur Berechnung der Werthe von A_2, A_4, A_6, 2c. bequemer ist, als der Inbegriff der Gleichungen (61).

Die Coefficienten A_2, A_4, A_6, 2c. heißen die Bernoullischen Zahlen. Wir wollen sie mit B_1, B_2, B_3, 2c. bezeichnen.

Bei dem Gebrauche der Gleichung (65) unter der Annahme $w = n$ und $r = n + 1$ ist zu unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle sey $n = 2p$, so ergibt sich, da man, wenn μ eine ganze positive Zahl ist, im Allgemeinen $\binom{\mu}{\mu-\rho}$ statt $\binom{\mu}{\rho}$ schreiben darf:

$$(66)\quad B_p + \left[\binom{2p}{1} + \binom{2p+1}{2}\right] B_{p+1} + \left[\binom{2p}{3} + \binom{2p+1}{4}\right] B_{p+2}$$
$$+ \left[\binom{2p}{5} + \binom{2p+1}{6}\right] B_{p+3} + \ldots + [4p+1] B_{2p} = 0.$$

Im zweiten Falle sey $n = 2p - 1$, so folgt

(67) $$\left[1 + \binom{2p}{1}\right] B_p + \left[\binom{2p-1}{2} + \binom{2p}{3}\right] B_{p+1}$$
$$+ \left[\binom{2p-1}{4} + \binom{2p}{5}\right] B_{p+2} + \ldots + [4p-1] B_{2p-1} = 0.$$

Die Gleichungen (66) und (67) geben für $p = 1, 2, 3, \ldots$

(68)

$B_1 + 5B_2 = 0$	$5B_2 + 7B_3 = 0$
$B_2 + 14B_3 + 9B_4 = 0$	$7B_3 + 30B_4 + 11B_5 = 0$
$B_3 + 27B_4 + 65B_5 + 18B_6 = 0$	$9B_4 + 77B_5 + 91B_6 + 15B_7 = 0$
u. s. w.	u. s. w.

Da $1 + 2A_1 = 0$, also $A_1 = -\frac{1}{2}$ ist; ferner nach (65) (für $w = 1$, $r = 2$) $A_1 + 3A_2 = 0$, also $A_2 = B_1 = \frac{1}{6}$ gefunden wird, so erhält man aus den Gleichungen (68)

$$B_2 = -\frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = -\frac{691}{2730},$$
$$B_7 = \frac{7}{6}\text{ etc.}$$

Nach Berücksichtigung aller dieser Ergebnisse nimmt die Formel (62) folgende Gestalt an:

(69) $$\Sigma x^m =$$
$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{x^m}{2} + B_1 \cdot \frac{1}{2}\binom{m}{1} x^{m-1}\Delta x + B_2 \cdot \frac{1}{4}\binom{m}{3} x^{m-3}\Delta x^3$$
$$+ B_3 \cdot \frac{1}{6}\binom{m}{5} x^{m-5}\Delta x^5 + \ldots\ldots + Const.$$

Das der Constante vorhergehende Glied enthält x oder x^2, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

Daß diese Formel auf die Summirung der Reihe der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen, folglich auch auf die Summirung jeder arithmetischen Reihe angewendet werden kann, ist für sich klar.

Drei und vierzigste Vorlesung.

Über das Differenziren der Functionen.

Läßt man die einer beliebigen Function $f(x)$ zum Grunde liegende veränderliche Größe x in $x + \Delta x$ übergehen, und theilt man die hieraus entspringende Differenz der Function, nämlich

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

durch die Differenz Δx der veränderlichen Größe, so erhält man im Allgemeinen eine Function von x und Δx zum Quotienten, welche wir durch $\varphi(x, \Delta x)$ vorstellen wollen, so daß

$$(1) \qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \varphi(x, \Delta x)$$

ist. Versetzt man nun in dieser Function $\varphi(x, \Delta x)$ die von x völlig unabhängige Größe Δx in den Zustand des unendlichen Abnehmens, so kann dabei die genannte Function nicht bei jedem Werthe von x unendlich wachsen oder unendlich abnehmen, sondern es ist dieß höchstens in Bezug auf isolirte Werthe von x möglich, dergestalt, daß sich kein noch so kleines Intervall der Werthe von x angeben läßt, innerhalb dessen $\varphi(x, \Delta x)$ bei dem unendlich klein Werden von Δx, fortwährend unendlich groß oder unendlich klein würde.

Wie auch immer die Function $f(x)$ beschaffen seyn mag, so läßt sich zu jedem Werthe von x, für welchen $f(x)$ einen angebbaren Werth annimmt, z. B. zu dem Werthe $x = a$ ein anderer $x = b$ finden, so daß $f(b)$ ebenfalls eine angebbare Größe ist, und $f(x)$, indem x von a bis b durch alle denkbaren Zwischenstufen übergeht, stets wächst oder stets abnimmt, also der Quotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ in Beziehung auf je zwei auf einander folgende Werthe von x dasselbe Zeichen erhält.

Man nehme $\Delta x = \frac{b - a}{n}$, wobei n eine ganze positive Zahl anzeigt, und gebe der veränderlichen Größe x nach und nach die Werthe

$$a, \; a + \Delta x, \; a + 2\Delta x, \; a + 3\Delta x, \; \ldots, \; a + (n-1)\Delta x,$$

so geht der Quotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ dabei in

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},\ \frac{f(a+2\Delta x)-f(a+\Delta x)}{\Delta x},\ \frac{f(a+3\Delta x)-f(a+2\Delta x)}{\Delta x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ \frac{f(a+n\Delta x)-f[a+(n-1)\Delta x]}{\Delta x},$$

über. Die Summe aller dieser n Werthe des genannten Quotienten ist

$$=\frac{f(a+n\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=n\,.\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

folglich kann nicht jeder derselben größer oder kleiner seyn als die völlig bestimmte Größe $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Da man zu demselben Resultate gelangt, wie groß man sich auch immer die Zahl n, oder wie klein man sich auch immer die Differenz $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ denken, und wie nahe immer b an a liegen mag, so ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Hieraus folgt, daß der Quotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bei dem unendlichen Abnehmen von Δx an eine Grenze gebunden ist, welche im Allgemeinen von x abhängt, d. h. als eine Function von x erscheint. Bezeichnen wir diese Function durch $f_1(x)$, so haben wir in Bezug auf das unendlich klein Werden von Δx die Gleichung

(2) $$lim.\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f_1(x).$$

Auch sieht man, daß $\Delta f(x)$ bei dem unendlichen Abnehmen von Δx selbst unendlich klein wird, weil sonst $f_1(x)$ jederzeit unendlich wachsen müßte, gegen das so eben Bewiesene.

Eine Differenz, welche im Zustande des unendlichen Abnehmens betrachtet wird, heißt ein Differenzial, und wird durch Vertauschung des Buchstabens Δ mit d bezeichnet.

Man kann daher die Gleichung (2) mit Weglassung des Zeichens *lim.* auch so schreiben:

(3) $$\frac{df(x)}{dx}=f_1(x).$$

Der Quotient $\frac{df(x)}{dx}$ heißt der Differenzialquotient der Function $f(x)$. Aus dem Ausdrucke desselben (3) folgt durch Multiplication mit dx die Differenzialgleichung

(4) $$df(x)=f_1(x)\,.\,dx,$$

welche im Grunde bloß eine abgekürzte Darstellung der aus (1) entspringenden Gleichung

(5) $$lim.\, \Delta f(x) = lim. [\varphi(x, \Delta x) \,.\, \Delta x]$$

ist.

Die Gleichung (4), nämlich den Ausdruck des Differenzials für eine gegebene Function finden, heißt diese Function differenziren.

Läßt sich die Differenz einer Function $f(x)$ in eine nach den steigenden Potenzen von Δx fortschreitende, bei dem unendlichen Abnehmen von Δx convergirende Reihe

$$\Delta f(x) = U_1 \Delta x + U_2 \Delta x^2 + U_3 \Delta x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

auflösen, worin U_1, U_2, U_3, ... Functionen von x anzeigen, so ist der Coefficient der ersten Potenz von Δx, nämlich U_1, der Differenzialquotient, und die Gleichung

$$df(x) = U_1\, dx$$

die Differenzialgleichung in Bezug auf die vorgelegte Function. Denn es ist

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = U_1 + U_2 \Delta x + U_3 \Delta x^2 + \ldots\ldots;$$

folglich, wenn Δx unendlich klein wird:

$$lim.\, \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = U_1.$$

Aus dem Gesagten ergibt sich von selbst ein allgemeines Verfahren, das Differenzial jeder Function einer veränderlichen Größe zu finden.

Man suche nämlich entweder aus der Beschaffenheit der gegebenen Function $f(x)$ unmittelbar die Grenze zu bestimmen, welcher sich der Quotient $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bei dem unendlichen Abnehmen von Δx ohne Ende nähert, und multiplicire diese Grenze mit dx; oder man entwickle $f(x+\Delta x) - f(x)$ nach den Potenzen von Δx, und behalte, nachdem man Δx mit dx vertauscht hat, bloß jene Glieder der Entwickelung bei, in welchen dx in der ersten Potenz erscheint.

Obschon der Anwendung der einen oder der anderen Form dieses Verfahrens bei allen Functionen einer veränderlichen Größe keine Schwierigkeit im Wege steht, so ist es doch der Bequemlichkeit der Rechnung zuträglich, die Differenzialien der einfachsten Functionen ein für alle

Mal zu entwickeln, und aus den dabei erhaltenen Resultaten eben so viele besondere Differenziationsregeln zu abstrahiren.

Ehe wir aber zur Auseinandersetzung dieser besonderen Regeln fortschreiten, wollen wir folgenden allgemeinen Satz erweisen, durch welchen nicht nur allein die Anwendung derselben auf die Functionen möglich wird, sondern auch für die Ableitung der erwähnten Regeln selbst ein Vortheil erwächst.

Das Differenzial einer Function mehrerer veränderlicher Größen, worunter wir die Grenze verstehen, der sich die totale Differenz derselben bei dem unendlichen Abnehmen der Differenzen der veränderlichen Größen unendlich nähert, ist der Summe der partiellen Differenzialien gleich, welche entstehen, wenn man in der ursprünglichen Function nach der Reihe jede der veränderlichen Größen um eine unendlich abnehmende Differenz variiren läßt, während man alle übrigen veränderlichen Größen als constant betrachtet.

Um uns hier, wie auch in der Folge, einer bequemen Bezeichnung zu bedienen, wollen wir festsetzen, daß unter du, wenn u eine Function mehrerer veränderlicher Größen $x, y, z, \ldots$ ist, stets das vollständige Differenzial von u in Bezug auf die Veränderlichkeit sämmtlicher variabler Größen $x, y, z, \ldots$ verstanden werde; hingegen soll ein Differenzialquotient, wie $\frac{du}{dx}$, immer den partiellen Differenzialquotienten ausdrücken, welcher sich ergibt, wenn in der Function u bloß x in $x+dx$ übergeht, und die übrigen Größen $y, z, \ldots$ ungeändert bleiben; so, daß es, sobald mehrere veränderliche Größen in Betrachtung kommen, nicht erlaubt ist $\frac{du}{dx}dx = du$ zu setzen, weil jetzt $\frac{du}{dx}dx$ bloß das in Bezug auf x genommene partielle Differenzial von u vorstellt, welches wir übrigens auch, die vierzigste Vorlesung vor Augen habend, durch $d_x u$ vorstellen könnten, wenn wir nicht befürchteten, uns hiedurch von der beinahe allgemein angenommenen Bezeichnungsweise zu sehr zu entfernen.

Der oben aufgestellte Satz wird durch die Gleichung

$$(6) \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots\ldots$$

ausgedrückt. Um ihn zu beweisen, betrachten wir der Kürze halber bloß eine Function dreier veränderlicher Größen

$$u = f(x, y, z).$$

Diese gibt uns

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z)$$

oder

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$
$$+ f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z+\Delta z)$$
$$+ f(x,\ y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z),$$

d. h. in den Zeichen der vierzigsten Vorlesung:

$$\Delta u = \underset{x}{\Delta} f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) + \underset{y}{\Delta} f(x,\ y,\ z+\Delta z) + \underset{z}{\Delta} f(x,\ y,\ z).$$

Läßt man nun Δx, Δy, Δz unendlich abnehmen, so nähern sich die Functionen $f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ und $f(x,\ y,\ z+\Delta z)$ ohne Ende der Function u, und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Auf ähnliche Art wird der Satz auch für Functionen mehrerer veränderlicher Größen dargethan.

Da dieser Satz gilt, die der Function zum Grunde liegenden Größen mögen von einander unabhängig seyn, oder in was immer für einem Zusammenhange stehen; so erhält man das Differenzial einer Function, welche sich in mehrere Parthien abtheilen läßt, diese Parthien mögen nun Theile seyn, aus welchen die Function durch Addition, oder Factoren, aus welchen dieselbe durch Multiplication gebildet wird, wenn man die partiellen Differenzialien der Function addirt, zu denen man gelangt, indem man nach der Reihe jede dieser Parthien für sich allein als veränderlich betrachtet.

Besteht also eine Function u aus mehreren Theilen P, Q, R, ... so ist $du = dP + dQ + dR + \ldots$; wobei man, wenn einer dieser Theile unveränderlich wäre, sein Differenzial $= 0$ zu setzen hätte.

Das Differenzial eines Productes veränderlicher Factoren x, y, z, ... ist demnach $= yz\ldots dx + xz\ldots dy + xy\ldots dz + \ldots$, also insbesondere

$$(7) \qquad d\,.\,xy = y\,dx + x\,dy$$
$$d\,.\,xyz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

u. s. w.

Ist $u = x^m$, so hat man, m mag was immer für eine Zahl bedeuten:

$\Delta u = (x+\Delta x)^m - x^m = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x^2 + $ 2c.,
also

(8) $$d \cdot x^m = m x^{m-1} dx.$$

Besonders häufig vorkommende specielle Fälle dieser Formel sind:

(9) $d \cdot x^2 = 2x dx$, $d \cdot x^3 = 3x^2 dx$, $d \cdot x^4 = 4x^3 dx$, 2c.

$d \cdot \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$, $d \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{2dx}{x^3}$, $d \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{3dx}{x^4}$, 2c.

$d \cdot \sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $d \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}}$, 2c.

Ist ein Bruch $u = \frac{x}{y}$ zu differenziren, so findet man wegen

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$

(10) $$d \cdot \frac{x}{y} = \frac{dx}{y} + x d \frac{1}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} = \frac{y dx - x dy}{y^2}.$$

Die hier aufgestellten Formeln reichen hin, das Differenzial jeder algebraischen Function einer oder mehrerer veränderlicher Größen anzugeben. Wenden wir uns nun zu den einfachsten der uns bekannten transcendenten Functionen.

Es ist $\Delta \cdot a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$, aber

$$a^{\Delta x} = 1 + \Delta x \cdot la + \frac{(\Delta x \cdot la)^2}{1 \cdot 2} + \text{2c.},$$

folglich $\Delta \cdot a^x = a^x \Delta x \cdot la +$ 2c., und daher

(11) $$d \cdot a^x = a^x dx\, la.$$

Wegen $le = 1$ hat man insbesondere

(12) $$d \cdot e^x = e^x dx.$$

Wir können nun auch eine Potenz y^x, deren Grundzahl und Exponent veränderliche Größen sind, differenziren. Es ist nämlich vermöge (6), (8) und (11)

(13) $$d \cdot y^x = x y^{x-1} dy + y^x dx\, ly.$$

Aus $\Delta lx = l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{x^2} +$ 2c. folgt

(14) $$dlx = \frac{dx}{x}.$$

Wir haben

$$\Delta \sin. x = 2 \sin. \tfrac{1}{2} \Delta x \cos. (x + \tfrac{1}{2} \Delta x);$$

folglich, nach der Methode der Grenzen, bei dem unendlichen Abnehmen von Δx:

(15) $$d\,sin.\,x = cos.\,x\,.\,dx.$$

Schreibt man hier $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x, so wird wegen $sin.(\frac{1}{2}\pi - x) = cos.\,x$, $cos.(\frac{1}{2}\pi - x) = sin.\,x$, $d(\frac{1}{2}\pi - x) = -dx$,

(16) $$d\,cos.\,x = -\,sin.\,x\,.\,dx.$$

Da $tg.\,x = \frac{sin.\,x}{cos.\,x}$ ist, so findet man nach (10)

(17) $$d\,tg.\,x = \frac{cos.\,x\,d\,sin.\,x - sin.\,x\,d\,cos.\,x}{cos.\,x^2} = \frac{cos.\,x^2 + sin.\,x^2}{cos.\,x^2}\,dx$$
$$= \frac{dx}{cos.\,x^2} = dx\,.\,sec.\,x^2,$$

und hieraus durch Vertauschung von x mit $\frac{1}{2}\pi - x$:

(18) $$d\,cot.\,x = -\frac{dx}{sin.\,x^2} = -\,dx\,.\,cosec.\,x^2.$$

Ferner ist $sec.\,x = \frac{1}{cos.\,x}$, also

(19) $$d\,.\,sec.\,x = -\frac{d\,cos.\,x}{cos.\,x^2} = \frac{sin.\,x\,.\,dx}{cos.\,x^2} = tg.\,x\,.\,sec.\,x\,.\,dx,$$

folglich auch

(20) $$d\,cosec.\,x = -\frac{cos.\,x\,.\,dx}{sin.\,x^2} = -\,cot.\,x\,.\,cosec.\,x\,.\,dx.$$

Die Formeln (15) und (17) geben

$$dx = \frac{d\,sin.\,x}{\sqrt{1 - sin.\,x^2}} \quad \text{und} \quad dx = \frac{d\,tg.\,x}{1 + tg.\,x^2}.$$

Setzt man in der ersteren Gleichung $sin.\,x = z$, und in der letzteren $tg.\,x = z$, so erhält man die Formeln

(21) $$d\,Arc.\,sin.\,z = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$ (22) $$d\,Arc.\,tg.\,z = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Eben so ergibt sich aus (16) und (18)

(23) $$d\,Arc.\,cos.\,z = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$ (24) $$d\,Arc.\,cot.\,z = -\frac{dz}{1 + z^2};$$

endlich aus (19) und (20) wegen

$$dx = \frac{d\,sec.\,x}{sec.\,x\sqrt{sec.\,x^2 - 1}} = -\frac{d\,cosec.\,x}{cosec.\,x\sqrt{cosec.\,x^2 - 1}}$$

(25) $$d\,Arc.\,sec.\,z = \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - 1}},$$ (26) $$d\,Arc.\,cosec.\,z = -\frac{dz}{z\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Vier und vierzigste Vorlesung.

Über die höheren Differenzialien der Functionen.

Denkt man sich die höheren Differenzen der veränderlichen Größen, welche in den höheren Differenzen einer Function erscheinen, in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, d. h. in Differenzialien verwandelt; so erhält man die höheren Differenzialien dieser Function. Bezeichnet man die höheren Differenzialien einer veränderlichen Größe auf ähnliche Art, wie die höheren Differenzen, jedoch mit Vertauschung des Buchstabens Δ gegen d, so findet man, wie die Gleichung (20) der vierzigsten Vorlesung zeigt, die höheren Differenzialien einer Function von x, wenn man das erste Differenzial derselben nach den in der vorhergehenden Vorlesung ertheilten Vorschriften hintereinander differenzirt, in so fern man d^2x als das Differenzial von dx, d^3x als das Differenzial von d^2x, u. s. w. betrachtet. Ein Gleiches gilt auch von den höheren Differenzialien der Functionen mehrerer veränderlicher Größen, wobei aber die höheren Differenzialien aller dieser Veränderlichen in Betrachtung kommen.

Es sey für eine Function $f(x)$ einer veränderlichen Größe x,

$$\begin{aligned} df(x) &= f_1(x) \,.\, dx \\ df_1(x) &= f_2(x) \,.\, dx \\ df_2(x) &= f_3(x) \,.\, dx \\ df_3(x) &= f_4(x) \,.\, dx \end{aligned}$$

u. s. w.,

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (27)\quad d^2f(x) &= d[f_1(x).dx] = df_1(x).dx + f_1(x).d^2x \\ &= f_2(x).dx^2 + f_1(x).d^2x \\ d^3f(x) &= d[f_2(x).dx^2 + f_1(x).d^2x] \\ &= df_2(x).dx^2 + 2f_2(x).dx\,d^2x + df_1(x).d^2x + f_1(x).d^3x \\ &= f_3(x).dx^3 + 3f_2(x).dx\,d^2x + f_1(x).d^3x \\ d^4f(x) &= f_4(x).dx^4 + 6f_3(x).dx^2\,d^2x + 3f_2(x).d^2x^2 \\ &\quad + 4f_2(x).dx\,d^3x + f_1(x).d^4x \end{aligned}$$

u. s. w.

Hieraus folgt

$$(28)\quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f_2(x) + f_1(x) \cdot \frac{d^2 x}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = f_3(x) + 3 f_2(x) \cdot \frac{d^2 x}{dx^2} + f_1(x) \cdot \frac{d^3 x}{dx^3}$$

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = f_4(x) + 6 f_3(x) \cdot \frac{d^2 x}{dx^2} + 3 f_2(x) \cdot \frac{d^2 x^2}{dx^4}$$

$$+ 4 f_2(x) \cdot \frac{d^3 x}{dx^3} + f_1(x) \cdot \frac{d^4 x}{dx^4}$$

u. s. w.

Da $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, u. s. w. ihrem Ursprunge gemäß bestimmte Functionen der veränderlichen Größe x sind, so nähern sich die Quotienten

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3},\quad \frac{d^4 f(x)}{dx^4},\ \text{2c.}$$

offenbar nur dann bei dem unendlich klein Werden der Differenzialien dx, d^2x, d^3x, d^4x, 2c. bestimmten von x abhängenden Grenzen, wenn die Quotienten

$$\frac{d^2 x}{dx^2},\quad \frac{d^3 x}{dx^3},\quad \frac{d^4 x}{dx^4},\ \text{2c.}$$

unter denselben Umständen weder unendlich wachsen, noch unendlich abnehmen. Man muß daher bei dem Übergange von den höheren Differenzen der Function $f(x)$ auf die correspondirenden Differenzialien derselben noch voraussetzen, daß im Allgemeinen der Quotient $\frac{d^r x}{dx^r}$, wobei r eine ganze positive Zahl bedeutet, eine völlig bestimmte Grenze zulasse. Deßhalb betrachtet man auch das r^{te} Differenzial einer veränderlichen Größe und die r^{te} Potenz ihres ersten Differenzials als Differenzial-Größen von einerlei Ordnung, und nennt sie zusammengehörige Differenzialien. Der Quotient, welchen ein höheres Differenzial einer veränderlichen Größe durch ein niedrigeres Differenzial derselben getheilt darbietet, nimmt bei dem unendlich klein Werden beider Differenzialien unendlich ab; der Quotient aber, welcher aus der Division eines niedrigeren Differenzials durch ein höheres entspringt, wächst dabei unendlich. Dasselbe gilt auch von den Differenzialien einer Function in Bezug auf die Differenzialien einer der ihr zum Grunde liegenden veränderlichen Größen.

Die Grenzen, welchen sich die Quotienten

$$\frac{d^2x}{dx^2}, \quad \frac{d^3x}{dx^3}, \quad \frac{d^4x}{dx^4}, \text{ etc.}$$

bei der unendlichen Abnahme der Differenzialien unendlich nähern, werden keinesweges durch die Beschaffenheit der zu differenzirenden Function $f(x)$ festgesetzt, sondern sie hängen bloß von den Beziehungen ab, welche unter den verschiedenen Differenzen der veränderlichen Größe x während ihrer unendlichen Verkleinerung Statt finden. Es bleiben demnach die Differenzialquotienten der Function $f(x)$, nämlich

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \quad \frac{d^4 f(x)}{dx^4}, \text{ etc.}$$

so lange unbestimmt, bis über die Bedeutung der Quotienten

$$\frac{d^2x}{dx^2}, \quad \frac{d^3x}{dx^3}, \quad \frac{d^4x}{dx^4}, \text{ etc.}$$

gehörig verfügt worden ist.

Die Unbestimmtheit der letzteren Quotienten, und somit auch jene der ersteren, wird aufgehoben, wenn man $\frac{d^2x}{dx^2}$ irgend einer Function von x, z. B. der Function $\varphi(x)$ gleich setzt. Denn hiedurch wird

$$d^2x = \varphi(x) \, . \, dx^2,$$

also $d^3x = d\varphi(x) \, . \, dx^2 + 2\varphi(x) \, . \, dx\,d^2x;$

und wenn man $d\varphi(x) = \varphi_1(x) \, . \, dx$ seyn läßt:

$$\frac{d^3x}{dx^3} = \varphi_1(x) + 2\varphi(x) \, . \, \frac{d^2x}{dx^2}$$

$$= \varphi_1(x) + 2[\varphi(x)]^2.$$

Daß auf demselben Wege fortgerechnet werden kann, ist für sich klar.

Bei den mannigfaltigen Anwendungen der Differenzialrechnung wird die Function, welcher der Quotient $\frac{d^2x}{dx^2}$ gleich seyn soll, fast durchgehends dadurch gegeben, daß man das zweite Differenzial, und daher auch alle höheren Differenzialien einer Function von x gleich Null annimmt, oder was dasselbe heißt, daß man das erste Differenzial dieser Function als eine constante Größe betrachtet. Es sey nämlich t die erwähnte Function, ferner

$$dt = \psi(x) \, . \, dx \quad \text{und} \quad d^2t = 0, \text{ so wird}$$

$$0 = d\psi(x) \, . \, dx + \psi(x) \, . \, d^2x;$$

oder, wenn man $d\psi(x) = \psi_1(x) \, . \, dx$ setzt:

$$0 = \psi_1(x) \, . \, dx^2 + \psi(x) \, . \, d^2x,$$

folglich $\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}.$

In diesem Falle ist also das obige $\varphi(x) = -\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}$. Die schickliche Wahl des constant zu setzenden Differenzials trägt sehr viel zur Einfachheit und Leichtigkeit der Rechnung bei, wie wir in der Folge sehen werden.

Wird das erste Differenzial der veränderlichen Größe x selbst, auf welche sich die zu differenzirende Function $f(x)$ bezieht, für eine beständige Größe erklärt, so hat man $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$, u. s. w.; folglich, wenn man die obige Bezeichnung beibehält:

(29)
$$d^2f(x) = f_2(x) \,.\, dx^2$$
$$d^3f(x) = f_3(x) \,.\, dx^3$$
$$d^4f(x) = f_4(x) \,.\, dx^4$$
u. s. w.

Die höheren unter dieser Voraussetzung genommenen Differenzialien der Functionen befolgen merkwürdige Bildungsgesetze. Es würde uns hier zu weit führen, wenn wir uns damit beschäftigen wollten, auf Mittel hinzuweisen, diese Gesetze zu entdecken. Daher begnügen wir uns hier einige der einfachsten Ergebnisse des fortgesetzten Differenzirens anzuführen.

Es sey $y = x^n$, n eine ganze positive Zahl und $d^2x = 0$, so findet man

(30)
$$dy = n x^{n-1} dx$$
$$d^2y = n(n-1) x^{n-2} dx^2$$
$$d^3y = n(n-1)(n-2) x^{n-3} dx^3$$
$$d^4y = n(n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4} dx^4$$
u. s. w.,

und allgemein
$$d^ry = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1) x^{n-r} dx^r\,.$$

Wird $r = n$, so hat man
$$d^ny = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\,.\,2\,.\,1\,.\, dx^n,$$

folglich $d^{n+1}y = 0$, $d^{n+2}y = 0$, u. s. w.; was schon daraus erhellet, daß $\Delta^{n+1}y = \Delta^{n+2}y =$ ꝛc. $= 0$ ist.

Ist $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, so hat man

(31)
$$dy = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}},$$
$$d^2y = \frac{n(n+1)\,dx^2}{x^{n+2}},$$

$$d^3 y = - \frac{n(n+1)(n+2)\, dx^3}{x^{n+3}}$$

u. s. w.,

und allgemein

$$d^r y = \frac{(-1)^r \cdot n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)\, dx^r}{x^{n+r}}.$$

Aus $y = \sin. x$ erhält man

(32) $dy = \cos. x . dx$, $d^2 y = -\sin. x . dx^2$, $d^3 y = -\cos. x . dx^3$,
$d^4 y = \sin. x . dx^4$, $d^5 y = \cos. x . dx^5$, ꝛc.

Wird aus $y = f(x)$, wie auch aus den auf einander folgenden Differenzialquotienten der Variablen y und x irgend ein analytischer Ausdruck U gebildet, so erhält derselbe, wie man aus Beispielen leicht sieht, im Allgemeinen verschiedene Bedeutungen, je nachdem dieses oder jenes erste Differenzial constant gesetzt wird, oder $\frac{d^2 x}{dx^2}$ diesen oder jenen Werth annimmt.

Findet man, in so fern $\frac{d^2 x}{dx^2} = \varphi(x)$ ist, $U = F(x)$, so läßt sich dem Ausdrucke U jederzeit eine solche Form geben, daß er auch, wenn $\frac{d^2 x}{dx^2} = \psi(x)$ angenommen wird, das vorige Resultat $U = F(x)$ darbietet. Man setze zu diesem Ende in dem Ausdrucke U statt der Differenzialien von y ihre durch die Formeln (27) angegebenen Werthe, so hat man einen Ausdruck vor sich, in welchem bloß die Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, ꝛc. und die Differenzialien dx, $d^2 x$, $d^3 x$, $d^4 x$, ꝛc. erscheinen. Läßt man daselbst $\frac{d^2 x}{dx^2} = \varphi(x)$ seyn, so reducirt er sich auf einen bloß $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ꝛc. und die durch die Differenziation von $\varphi(x)$ erzeugten Größen enthaltenden Ausdruck, dessen Werth $= F(x)$ ist. Nun hat man

(33) $$f_1(x) = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$f_2(x) = \frac{d f_1(x)}{dx} = \frac{d . \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{dx^3}$$

$$f_3(x) = \frac{d f_2(x)}{dx} = \frac{dx^2\, d^3 y - 3dx\, d^2 x\, d^2 y + 3dy\, d^2 x^2 - dx\, dy\, d^3 x}{dx^5}$$

$$f_4(x) = \frac{d f_3(x)}{dx}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} dx^3 d^4y - 6dx^2 d^2x d^3y - 4dx^2 d^2y d^3x + 15 dx d^2x^2 d^2y \\ + 10 dx dy d^2x d^3x - 15 dy d^2x^3 - dx^2 dy d^4x \end{array}\right\}}{dx^7}$$

u. s. w.,

welche Formeln für jeden Werth von $\frac{d^2x}{dx^2}$ bestehen; folglich erhält man, wenn man mittelst derselben die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, ꝛc. aus dem zuletzt gefundenen Ausdrucke wegschafft, einen Ausdruck, dessen Werth $= F(x)$ ist, man mag zwischen d^2x und dx^2 keine, oder was immer für eine beliebige Relation, z. B. die oben angeführte $\frac{d^2x}{dx^2} = \psi(x)$, festsetzen.

Betrachten wir nun die höheren Differenzialien einer Function u zweier von einander unabhängiger veränderlicher Größen x und y. Wir haben

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

wobei die partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ im Allgemeinen Functionen von x und y sind. Setzen wir der Kürze wegen $\frac{du}{dx} = p$ und $\frac{du}{dy} = q$, also

(34) $$du = p dx + q dy.$$

Hieraus folgt $d^2u = dp dx + p d^2x + dq dy + q d^2y$.

Nun ist $$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy$$

und $$dq = \frac{dq}{dx} dx + \frac{dq}{dy};$$

aber $$\frac{dp}{dy} = \frac{d.\frac{du}{dx}}{dy}, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{d.\frac{du}{dy}}{dx},$$

und wie wir bereits in der vierzigsten Vorlesung bemerkt haben,

$$\underset{y,x}{\Delta\Delta} u = \underset{x\,y}{\Delta\Delta} u,$$

wenn man bei der Bestimmung der zweiten partiellen Differenz die durch die erste herbeigeführte Größe Δx oder Δy als unveränderlich betrachtet; also auch

$$\frac{\underset{y}{\Delta} \cdot \frac{\underset{x}{\Delta} u}{\Delta x}}{\Delta y} = \frac{\underset{x}{\Delta} \cdot \frac{\underset{y}{\Delta} u}{\Delta y}}{\Delta x};$$

folglich, wenn man von den Differenzen auf die Differenzialien übergeht:

$$\frac{d\,\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d\,\frac{du}{dy}}{dx},$$

$$\text{d. h.}\quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

Es sey der Kürze wegen

$$\frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t,$$

so haben wir

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

daher

$$(35)\quad d^2u = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y.$$

Soll dieser Ausdruck die nöthige Bestimmtheit besitzen, so muß sowohl zwischen d^2x und dx^2, wie auch zwischen d^2y und dy^2 eine Gleichung gegeben seyn. Da dx und dy gar nicht von einander abhängen, so kann man sowohl d^2x als auch d^2y gleich Null setzen. Unter dieser Voraussetzung hat man den einfacheren Ausdruck:

$$(36)\quad d^2u = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Man pflegt öfters auch $\frac{d^2u}{dx^2}$ statt r, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ statt s, und $\frac{d^2u}{dy^2}$ statt t zu schreiben, welche Bezeichnungen nach den bei den Differenzen gebrauchten gebildet sind, und sich aus dem Gange der obigen Rechnung leicht rechtfertigen lassen; daher ist für $d^2x = 0$ und $d^2y = 0$ auch

$$(37)\quad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2.$$

Unter denselben Voraussetzungen findet man

$$(38)\quad d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}\,dx^3 + 3\,\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\,dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3},$$

und allgemein

$$(39)\quad d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{d^n u}{dx^{n-1}\, dy} dx^{n-1} dy$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{d^n n}{dx^{n-2}\, dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \binom{n}{n-1} \frac{d^n u}{dx\, dy^{n-1}} dx\, dy^{n-1} + \frac{d^n u}{dy^n},$$

wobei die identischen Ausdrücke

$$\frac{d^r \cdot \frac{d^m u}{dx^m}}{dy^r} \quad \text{und} \quad \frac{d^m \cdot \frac{d^r u}{dy^r}}{dx^m} \quad \text{überhaupt durch} \quad \frac{d^{m+r} u}{dx^m\, dy^r}$$

vorgestellt werden.

Auf ähnliche Weise verfährt man mit Functionen dreier und mehrerer veränderlicher Größen.

Fünf und vierzigste Vorlesung.

Über den Gebrauch der Differenzialrechnung bei der Bestimmung der unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden, wie auch der größten und kleinsten Werthe der Functionen.

Es ist in Bezug auf das unendliche Abnehmen von Δx

$$lim. \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx};$$

oder, wenn wir $\frac{df(x)}{dx} = f_1(x)$ setzen:

$$(1) \qquad lim. \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x).$$

Eben so ist für eine andere Function derselben veränderlichen Größe unter derselben Voraussetzung

$$(2) \qquad lim. \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F_1(x),$$

wenn der Differenzialquotient $\frac{dF(x)}{dx}$ durch $F_1(x)$ bezeichnet wird.

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad lim. \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{F(x+\Delta x)-F(x)} = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}.$$

Nehmen wir nun an, daß die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für die Substitution $x = x_0$ verschwinden, so gibt uns die Gleichung (3), wenn wir daselbst x_0 statt x schreiben, wegen $f(x_0) = 0$ und $F(x_0) = 0$

$$lim. \frac{f(x_0+\Delta x_0)}{F(x_0+\Delta x_0)} = \frac{f_1(x_0)}{F_1(x_0)}.$$

Aber offenbar ist bei dem unendlich klein Werden von Δx_0

$$lim. \frac{f(x_0+\Delta x_0)}{F(x_0+\Delta x_0)} = \frac{f(x_0)}{F(x_0)};$$

folglich haben wir, in so ferne der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ für den particulären Werth $x = x_0$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält:

$$(4) \qquad \frac{f(x_0)}{F(x_0)} = \frac{f_1(x_0)}{F_1(x_0)}.$$

Wenn nun die Größen $f_1(x_0)$, $F_1(x_0)$ nicht zugleich verschwinden, so wird durch diese Gleichung der Werth des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = x_0$ auf eine unzweideutige Art ausgedrückt. Das Verschwinden einer der Functionen $f_1(x)$, $F_1(x)$ für $x = x_0$ legt der Kenntniß der Beschaffenheit des Bruches $\frac{f(x_0)}{F(x_0)}$ kein Hinderniß in den Weg. Ist $f_1(x_0) = 0$ und $F_1(x_0)$ von 0 verschieden, so ist auch $\frac{f(x_0)}{F(x_0)} = 0$. Ist hingegen $F_1(x_0) = 0$ und $f(x_0)$ von 0 verschieden, so wird der Werth des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = x_0$ unendlich, d. h. dieser Bruch kann durch fortwährende Annäherung des Werthes der veränderlichen Größe x an die fixe Größe x_0 größer gemacht werden, als jede beliebige noch so große Größe.

Werden die Functionen $f_1(x)$, $F_1(x)$ durch die Substitution $x = x_0$ ebenfalls auf Null reducirt, so gibt die Gleichung (4) über die Bedeutung des Bruches $\frac{f(x_0)}{F(x_0)}$ keinen Aufschluß. Aber dann ist eben dieser Gleichung gemäß, wenn wir

$$\frac{d f_1(x)}{dx} = f_2(x) \quad \text{und} \quad \frac{d F_1(x)}{dx} = F_2(x)$$

setzen:

$$\frac{f_1(x_0)}{F_1(x_0)} = \frac{f_2(x_0)}{F_2(x_0)};$$

fällt daher wenigstens eine der Größen $f_2(x_0)$, $F_2(x_0)$ von 0 verschieden aus, so wird uns auch der Werth des in Frage stehenden Bruches gegeben, d. h. es ist

$$\frac{f(x_0)}{F(x_0)} = \frac{f_2(x_0)}{F_2(x_0)}. \tag{5}$$

Im Allgemeinen sey für alle Werthe der ganzen positiven Zahl n

$$\frac{d f_{n-1}(x)}{dx} = f_n(x) \quad \text{und} \quad \frac{d F_{n-1}(x)}{dx} = F_n(x);$$

ferner nehmen wir an, daß für $x = x_0$ sämmtliche Größen

$$\begin{array}{l} f(x_0),\ f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ f_3(x_0),\ \ldots\ldots f_{r-1}(x_0) \\ F(x_0),\ F_1(x_0),\ F_2(x_0),\ F_3(x_0),\ \ldots\ldots F_{r-1}(x_0) \end{array}$$

gleich Null werden, so besteht die Gleichung

$$\frac{f(x_0)}{F(x_0)} = \frac{f_r(x_0)}{F_r(x_0)}, \tag{6}$$

und diese drückt, wenn $f_r(x_0)$ und $F_r(x_0)$ nicht zugleich verschwinden, den unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Werth des Bruches $\frac{f(x_0)}{F(x_0)}$ mit hinreichender Bestimmtheit aus.

Nimmt also eine gebrochene Function einer veränderlichen Größe, für einen besonderen Werth dieser letzteren, die Form $\frac{0}{0}$ an, so differenzire man den Zähler wie auch den Nenner derselben, indem man das Differenzial der Veränderlichen als constant betrachtet, gleich oft und so lange hinter einander, bis man auf Differenzialcoefficienten kömmt, welche für den erwähnten Werth der veränderlichen Größe nicht beide verschwinden. Der Quotient der Werthe, welche diese Coefficienten dabei erhalten, zeigt den Werth des vorgelegten Bruches in Bezug auf die vorgenommene Specialisirung der veränderlichen Größe an.

Es gibt Fälle, in welchen die successiven Differenzialcoefficienten des Zählers und Nenners einer gebrochenen Function für einen partikulären Werth der veränderlichen Größe anfänglich gleich Null, und später unendlich werden, und deßhalb die Anwendung obiger Regel zu keinem Resultate führt. Dann suche man aus dem vorgelegten Bruche einen anderen abzuleiten, aus dessen Werthe jener des ersteren erschlossen werden kann, und der von diesem Hindernisse frei ist. So wird man z. B., wenn der Werth des Bruches $\frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ für $x=1$ nach der obigen Regel zu bestimmen wäre, demselben die Form $\sqrt[6]{\frac{(x^3-1)^3}{(x^2-1)^2}}$ geben, und den Werth des Bruches $\frac{(x^3-1)^3}{(x^2-1)^2}$ für $x=1$ eben dieser Regel gemäß ausmitteln. In diesem Bruche zeigt sich $(x-1)^2$ als gemeinschaftlicher Factor des Zählers und Nenners, weßwegen beide für $x=1$ verschwinden. Nach Absonderung dieses Factors bleibt im Zähler noch der Factor $x-1$ zurück, und deßhalb ist der Werth des Bruches $=0$, wenn $x=1$ gesetzt wird, was man auch durch den Gebrauch der Differenzialrechnung findet, durch deren Hülfe man oft schneller zum Ziele gelangt, als durch das Aufsuchen der gemeinschaftlichen Factoren, wegen welchen Zähler und Nenner einer gebrochenen Function zugleich verschwinden.

Es gibt mehrere unbestimmte Rechnungsformen, welche sich auf die Gestalt $\frac{0}{0}$ bringen lassen, z. B. $\frac{a}{0}-\frac{b}{0}$, $\frac{a}{0}:\frac{b}{0}$ u. d. gl. Wir wer-

den durch das so eben Gesagte gleichfalls in den Stand gesetzt, über ihren eigentlichen Sinn zu urtheilen.

Die Grenze, welcher sich eine Function bei der unendlichen Abnahme einer darin erscheinenden veränderlichen Größe ohne Ende nähert, läßt sich offenbar als der Werth betrachten, welchen diese Function annimmt, wenn man die genannte Veränderliche $= o$ setzt.

So ist, wenn Δx in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt wird, $lim. \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ gleich dem Werthe des Bruches $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ für $\Delta x = o$. Da aber unter dieser Annahme der Bruch in $\frac{o}{o}$ übergeht, so findet man der obigen Regel gemäß seinen Werth, wenn man das in Bezug auf Δx genommene Differenzial von $f(x+\Delta x) - f(x)$ durch $d\Delta x$ theilt, und in dem Quotienten $\Delta x = o$ setzt. Da $f(x)$ kein Δx enthält, so ist der erwähnte Quotient dem partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{df(x+\Delta x)}{d\Delta x}$$

gleich. Läßt man $\frac{df(x)}{dx} = f_1(x)$ oder

$$df(x) = f_1(x) \, . \, dx$$

seyn, so ist, wenn man hier $x + \Delta x$ statt x schreibt:

$$\begin{aligned} df(x+\Delta x) &= f_1(x+\Delta x) \, . \, d(x+\Delta x) \\ &= f_1(x+\Delta x) \, . \, dx + f_1(x+\Delta x) \, . \, d\Delta x; \end{aligned}$$

also in so fern man bloß Δx als veränderlich betrachtet:

$$\frac{df(x+\Delta x)}{d\Delta x} = f_1(x+\Delta x).$$

Setzt man nun $\Delta x = o$, so hat man

$$lim. \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f_1(x),$$

wie es auch die Natur der Sache mit sich bringt.

Untersuchen wir nun, in welchem Falle der Quotient

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^n},$$

wobei n eine ganze positive Zahl bedeutet, bei dem unendlich klein Werden von Δx eine von Null verschiedene angebbare Grenze zuläßt. Da

$lim. \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^n}$ der Werth des Bruches $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^n}$ für $\Delta x = o$ ist, so haben wir nach gehöriger Anwendung der obigen Regel

$$lim. \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^n} = \frac{f_1(x+\Delta x)}{n \Delta x^{n-1}};$$

vorausgesetzt, daß man im zweiten Theile der Gleichung o statt Δx schreibt. Ist $f_1(x)$ von Null verschieden, und $n > 1$, so wird der Bruch $\frac{f_1(x+\Delta x)}{\Delta x^{n-1}}$ für $\Delta x = o$ unendlich groß; hingegen nimmt dieser Bruch die Form $\frac{o}{o}$ an, wenn x einen Werth erhält, für welchen $f_1(x)$ verschwindet. Es sey x_0 ein solcher Werth von x, also $f_1(x_0) = o$, so finden wir, weil jetzt wieder die obige Regel angewendet werden kann,

$$lim. \frac{f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} = \frac{f_2(x_0+\Delta x_0)}{n(n-1)\Delta x_0^{n-2}},$$

wobei im zweiten Theile der Gleichung $\Delta x_0 = o$ gesetzt werden muß, und die Form der Function f_2 durch die Bedingung

$$df_1(x) = f_2(x) \cdot dx$$

bestimmt wird. Auch hier zeigt sich $\frac{f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n}$ als eine bei dem unendlichen Abnehmen von Δx unendlich wachsende Größe, wofern nicht $f_2(x_0) = o$ ist.

Setzen wir nun

$$df_2(x) = f_3(x) \cdot dx, \quad df_3(x) = f_4(x) \cdot dx; \text{ etc.}$$

und lassen wir auch

$$f_3(x_0), f_4(x_0), \ldots . f_{n-1}(x_0)$$

verschwinden, so erhalten wir durch fortgesetzte Anwendung der obigen Regel

$$lim. \frac{f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} = \frac{f_3(x_0+\Delta x_0)}{n(n-1)(n-2)\Delta x_0^{n-3}} = \frac{f_4(x_0+\Delta x_0)}{n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta x_0^{n-4}} = \text{etc.}$$

$$\ldots \ldots = \frac{f_n(x_0+\Delta x_0)}{n(n-1)\ldots . 3 . 2 . 1},$$

wobei noch überall $\Delta x_0 = o$ zu setzen ist. Wir haben somit

$$lim. \frac{f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} = \frac{f_n(x_0)}{1 . 2 . 3 \ldots . n}.$$

Wird auch $f_n(x_0) = 0$, so ist die zu suchende Grenze $= 0$; fällt aber $f_n(x_0)$ von o verschieden aus, so zeigt sich ebenfalls

$$lim. \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n}$$

als eine nicht verschwindende angebbare Größe.

Es läßt also der Quotient

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x^n}$$

für alle jene Werthe von x bei dem unendlich klein Werden der Differenz Δx eine von Null verschiedene nicht unendlich wachsende Grenze zu, für welche die Functionen

$$f_1(x) = \frac{df(x)}{dx},\ f_2(x) = \frac{df_1(x)}{dx},\ \ldots\ldots f_{n-1}(x) = \frac{df_{n-2}(x)}{dx}$$

gleich Null werden, $f_n(x) = \frac{df_{n-1}(x)}{dx}$ aber von o verschieden ausfällt, und diese Grenze ist $= \frac{f_n(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$, in so fern x auch hier die erwähnten Werthe erhält.

Wenn eine Function $f(x)$, während sich die ihr zum Grunde liegende veränderliche Größe x stets in einem und demselben Sinne ändert, d. h. entweder ununterbrochen fort wächst, oder ununterbrochen fort abnimmt, aus dem Zustande des Wachsens in jenen des Abnehmens übergeht; so gibt es nothwendig einen Werth der Veränderlichen, z. B. $x = x_0$, für welchen $f(x)$ größer wird, als die Werthe, welche diese Function annimmt, wenn man x noch um etwas vergrößert oder verkleinert, d. h. für welchen, wenn nur Δx_0 gehörig klein angenommen und sodann nach Gefallen verringert wird, sowohl

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x_0) \quad \text{als auch} \quad f(x_0) > f(x_0 - \Delta x_0)$$

Statt findet. Man sagt in diesem Falle, die Function $f(x)$ werde für $x = x_0$ ein Größtes oder ein Maximum. Geht aber die Function $f(x)$ aus dem Zustande des Abnehmens in jenen des Wachsens über, so gibt es einen Werth von x, z. B. $x = x_0$, für welchen, bei gehöriger Kleinheit der Differenz Δx_0 und bei allen noch kleineren Werthen derselben, sowohl

$$f(x_0) < f(x_0 + \Delta x_0) \quad \text{als auch} \quad f(x_0) < f(x_0 - \Delta x_0)$$

ist, und für diesen Werth von x wird die Function ein Kleinstes oder ein Minimum.

Im Zustande des Maximums wird also die Function größer, und im Zustande des Minimums kleiner, als jeder der unmittelbar an sie grenzenden, durch eine geringe Vermehrung oder Verminderung der veränderlichen Größe herbeigeführten Nachbarwerthe.

Da eine Function bei dem Fortschreiten der veränderlichen Größe mehrere Male aus dem Wachsen in das Abnehmen und umgekehrt übergehen kann, so sind auch mehrere größte und kleinste Werthe derselben möglich. Aber jedes wiederholte Wachsen setzt ein vorhergegangenes Abnehmen und umgekehrt voraus; daher wird, wenn man sämmtliche Werthe der Function nach den in einerlei Sinn fortgesetzten Änderungen der veränderlichen Größe ordnet, stets ein Maximum mit einem Minimum abwechseln. Um nicht zu beständigen Unterscheidungen zwischen positiven und negativen Größten und Kleinsten genöthigt zu seyn, wollen wir die Beziehungen »wachsen« und »abnehmen« — »größer« und »kleiner« in dem schon in der dreizehnten Vorlesung gebrauchten algebraischen Sinne nehmen, so daß im Zusammenhange mit allen übrigen Veränderungen die negativen Minima als Maxima, und die negativen Maxima als Minima auftreten.

Es dürfte kaum nöthig seyn zu bemerken, daß hier bloß von den relativen größten und kleinsten Werthen der Functionen die Rede ist. Sind alle relativen Maxima und Minima einer Function bekannt, so kann aus denselben leicht ihr absolutes Maximum und Minimum, sowohl in arithmetischer, als auch in algebraischer Bedeutung ausgeschieden werden.

Da der früher gebrauchten Bezeichnung gemäß für das unendliche Abnehmen von Δx

$$lim. \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

daher auch, wenn man das Zeichen von Δx ändert,

$$lim. \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = f_1(x),$$

$$\text{d. h. } lim. \frac{f(x\pm\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \pm f_1(x)$$

ist, so erhalten die Differenzen $f(x+\Delta x)-f(x)$ und $f(x-\Delta x)-f(x)$ bei den kleinsten Werthen von Δx, sobald $f_1(x)$ einen bestimmten, von der Nulle verschiedenen Werth besitzt, gewiß entgegengesetzte Zeichen, und es findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes der Function $f(x)$

Statt, sondern diese Function nimmt bei dem Wachsen von x zu oder ab, je nachdem $f_1(x)$ selbst positiv oder negativ erscheint. Es geben demnach nur jene Werthe von x ein Maximum oder ein Minimum der Function $f(x)$, für welche der Differenzialquotient $f_1(x)$ verschwindet oder unendlich wird, d. h. für welche, nach Beseitigung der dabei allenfalls entstehenden Form $\frac{0}{0}$, die Nulle bloß im Zähler oder bloß im Nenner dieses Quotienten vorkommt. Um daher diese Werthe von x zu erhalten, muß man die Gleichungen $f_1(x) = 0$, $\frac{1}{f_1(x)} = 0$ auflösen. Welche ihrer Wurzeln aber auf ein Maximum, welche auf ein Minimum der Function $f(x)$, und welche auf keines von beiden führen, muß nach den Zeichen entschieden werden, welche die Differenzen $f(x + \Delta x) - f(x)$ und $f(x - \Delta x) - (x)$ bei dem unendlichen Abnehmen von Δx in Bezug auf diese Wurzeln an sich tragen.

Die Beschaffenheit der Function $f(x)$, wenn statt x eine Wurzel der Gleichung $f_1(x) = 0$ gesetzt wird, läßt sich kurz auf folgende Art untersuchen. Man substituire diese Wurzel statt x in die folgenden Differenzialquotienten $f_2(x) = \frac{df_1(x)}{dx}$, $f_3(x) = \frac{df_2(x)}{dx}$, rc. bis man auf einen kommt, welcher dabei nicht verschwindet. Er sey $f_n(x)$, so sind wegen

$$lim. \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x^n} = \frac{f_n(x)}{1 . 2 . 3 \ldots . n}, \text{ woraus}$$

$$lim. \frac{f(x \pm \Delta x) - f(x)}{\Delta x^n} = \frac{(\pm 1)^n . f_n(x)}{1 . 2 . 3 \ldots . n}$$

folgt, die Zeichen der Differenzen $f(x + \Delta x) - f(x)$ und $f(x - \Delta x) - f(x)$ bei den kleinsten Werthen von Δx, ungleich oder gleich, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Im ersten Falle gibt die erwähnte Wurzel kein Maximum oder Minimum der vorgelegten Function; im zweiten Falle bietet sie aber ein Maximum dar, wenn $f_n(x)$ negativ, und ein Minimum, wenn $f_n(x)$ positiv erscheint.

Die Bestimmung der bei einer Function u mehrerer von einander unabhängiger veränderlicher Größen x, y, z, ... Statt findenden Maxima und Minima läßt sich auf die so eben vorgetragenen Lehren zurückführen.

Für jene Werthe von x, y, z, ..., welche $u = f(x, y, z, \ldots)$ zu einem Maximum oder zu einem Minimum machen, muß bei den

kleinsten Werthen der positiv und negativ genommenen Differenzen $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ im ersten Falle

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) < f(x, y, z, \ldots),$$

und im zweiten Falle

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) > f(x, y, z, \ldots)$$

seyn. Man kann, in so fern $\lambda, \xi, \upsilon, \zeta, \ldots$ veränderliche Größen anzeigen, stets

$$\Delta x = \lambda \xi, \quad \Delta y = \lambda \upsilon, \quad \Delta z = \lambda \zeta, \ldots$$

setzen, wodurch sich die vorliegende Aufgabe darauf reducirt, $x, y, z, \ldots$ so zu wählen, daß die Function

$$F(\lambda) = f(x+\lambda\xi, y+\lambda\upsilon, z+\lambda\zeta, \ldots)$$

für $\lambda = 0$ ein Maximum oder ein Minimum wird, welche Werthe die Größen $\xi, \upsilon, \zeta, \ldots$ auch immer haben mögen. Zu diesem Ende muß erstlich $F_1(\lambda) = \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ für $\lambda = 0$ entweder verschwinden, oder unendlich zunehmen. Betrachten wir bloß den ersten dieser Fälle als den am häufigsten vorkommenden.

Offenbar hat man

$$F_1(0) = \frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\upsilon + \frac{du}{dz}\zeta + \ldots,$$

welche Größe nur dann für jedes $\xi, \upsilon, \zeta, \ldots$ gleich Null wird, wenn die Gleichungen $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$, rc. Statt finden. Hieraus ergeben sich, da die partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots$ im Allgemeinen als Functionen von $x, y, z, \ldots$ erscheinen, Werthe für $x, y, z, \ldots$, unter welchen die zur Auflösung der Aufgabe dienlichen gewiß vorhanden sind. Um diese letzteren heraus zu finden, muß man die höheren Differenzialquotienten $F_2(0)$, $F_3(0)$, rc. auf die oben erklärte Weise berücksichtigen.

Es sey z. B. $u = f(x, y)$, so ist, wenn r, s, t die in der vier und vierzigsten Vorlesung gebrauchten Bedeutungen haben,

$$F_2(0) = r\xi^2 + 2s\xi\upsilon + t\upsilon^2 = r\left(\xi + \frac{s}{r}\upsilon\right)^2 + \left(t - \frac{s^2}{r}\right)\upsilon^2.$$

Sind also r und $t - \frac{s^2}{r}$ für die Werthe von x und y, für welche die partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx} = p$, und $\frac{du}{dy} = q$ verschwin-

den, zugleich negative Größen, so wird $F_2(o)$ für jedes ξ und v negativ, und es geben die erwähnten Werthe der Variablen ein Maximum von u; sind unter denselben Umständen r und $t - \frac{s^2}{r}$ zugleich positiv, so wird $F_2(o)$ für jedes ξ und v positiv, und es findet ein Minimum von u Statt; haben r und $t - \frac{s^2}{r}$ verschiedene Zeichen, so fällt $F_2(o)$ für gewisse Werthe von ξ und v positiv, für andere aber negativ aus, und deßhalb kann von keinem Maximum oder Minimum der Function u die Rede seyn; ergibt sich $t - \frac{s^2}{r} = o$, so bekömmt $F_2(o)$ stets das Zeichen von r, ausgenommen wenn ξ und v so gewählt werden, daß $r\xi + sv$, folglich auch $F_2(o)$ verschwindet, und es befindet sich u im Zustande des Maximums oder Minimums, wenn der erste bei dieser Annahme von ξ und v nicht verschwindende unter den Differenzialquotienten $F_3(o)$, $F_4(o)$, ꝛc. einen geraden Zeiger führt, und mit r zugleich negativ oder positiv erscheint. In dem Falle, wenn r, s, t gleich Null werden, also $F_2(o)$ für jedes ξ und v verschwindet, muß man ebenfalls auf $F_3(o)$, $F_4(o)$, ꝛc. übergehen.

Sechs und vierzigste Vorlesung.

Über die Taylor'sche und Maclaurin'sche Formel.

Die in der vorhergehenden Vorlesung zur Bestimmung des Werthes einer in $\frac{0}{0}$ übergehenden Function vorgetragene Methode läßt sich auch auf die Entwickelung des Ausdruckes $f(x+\Delta x)$ in eine nach den steigenden Potenzen der Differenz Δx geordnete Reihe anwenden. Denn da in Bezug auf das unendlich klein Werden von Δx

$$lim. \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

ist, so besteht offenbar $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ aus zwei Theilen, wovon einer $f_1(x)$ von Δx gar nicht abhängt, und der zweite, welchem wir die Form $\omega_1 \Delta x$ geben wollen, bei dem unendlichen Abnehmen von Δx unendlich klein wird. Es ist demnach

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x) + \omega_1 \Delta x$$

und $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f_1(x)\,.\,\Delta x}{\Delta x^2} = \omega_1.$$

Wird Δx wieder in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, so nähert sich ω_1 ohne Ende einer Grenze, welche man durch den Werth kennen lernt, den diese Größe für $\Delta x = o$ annimmt. Aber der Bruch

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f_1(x)\,.\,\Delta x}{\Delta x^2}$$

geht unter dieser Annahme in $\frac{0}{0}$ über; ein Gleiches geschieht mit dem Quotienten zwischen den in Bezug auf Δx genommenen Differenzialien seines Zählers und Nenners, nämlich mit

$$\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{2\Delta x};$$

man muß daher den Zähler und Nenner dieses letzteren Bruches noch ein Mal in Hinsicht auf Δx differenziren, und in dem Resultate $\frac{f_2(x+\Delta x)}{2}$ die Differenz Δx gleich Null setzen, wodurch sich $\frac{1}{2}f_2(x)$ als der Werth von ω_1 für $\Delta x = o$ ergibt. Die Form der mit f_2 be-

zeichneten Function wird durch die Gleichung $\frac{df_1(x)}{dx} = f_2(x)$ bestimmt, wie wir es in den früheren Vorlesungen, deren Bezeichnungen wir hier durchgehends beibehalten, gethan haben. Es ist also bei dem unendlichen Abnehmen von Δx

$$lim. \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x) . \Delta x}{\Delta x^2} = \tfrac{1}{2} f_2(x),$$

weßwegen man auf ähnliche Weise wie vorhin

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x) . \Delta x}{\Delta x^2} = \tfrac{1}{2} f_2(x) + \omega_2 \Delta x$$

oder $\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x) . \Delta x - \frac{1}{2} f_2(x) . \Delta x^2}{\Delta x^3} = \omega_2$

setzen kann.

Für $\Delta x = 0$ nimmt ω_2 die Form $\frac{0}{0}$ an; dasselbe findet bei den Resultaten Statt, welche sich ergeben, wenn man den Zähler und den Nenner dieses Ausdruckes zwei Mal nach einander in Bezug auf Δx differenzirt. Erst eine dritte Differenziation verhilft uns zu dem Werthe von ω_2 unter der gemachten Voraussetzung.

Er ist $= \frac{1}{2.3} f_3(x)$, und deßhalb haben wir

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x) . \Delta x - \frac{1}{2} f_2(x) . \Delta x^2}{\Delta x^3} = \frac{1}{2.3} f_3(x) + \omega_3 \Delta x.$$

Das Gesetz, nach welchem diese Rechnung fortschreitet, fällt bereits in die Augen. Im Allgemeinen findet man

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x).\Delta x - \frac{1}{2} f_2(x).\Delta x^2 - \ldots - \frac{1}{2.3\ldots(n-1)} f_{n-1}(x).\Delta x^{n-1}}{\Delta x^n}$$

$$= \frac{1}{2.3\ldots.(n-1)\,n} f_n(x) + \omega_n . \Delta x.$$

Sucht man aus dieser Gleichung $f(x+\Delta x)$, so hat man die unter dem Namen des Taylor'schen Lehrsatzes bekannte Formel:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f_1(x).\Delta x + \tfrac{1}{2} f_2(x).\Delta x^2 + \frac{1}{2.3} f_3(x).\Delta x^3 + \text{rc.}$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{2.3\ldots(n-1)\,n} f_n(x).\Delta x^n + \omega_n . \Delta x^{n+1}.$$

Nimmt die Ergänzung $\omega_n \Delta x^{n+1}$ der Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens unendlich ab, wenn n unendlich groß wird, so läßt sich $f(x+\Delta x)$ durch die unendliche Reihe

$$f(x) + f_1(x) \cdot \Delta x + \tfrac{1}{2} f_2(x) \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} f_3(x) \cdot \Delta x^3 + \text{ꝛc.}$$

darstellen. Es ist demnach höchst wichtig, den Betrag dieser Ergänzung in jedem einzelnen Falle beurtheilen zu können, wozu folgende Betrachtungen behülflich seyn werden.

Die hinsichtlich des unendlichen Abnehmens von Δx Statt findende Gleichung

$$\lim. \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f_1(x)$$

zeigt, daß das Zeichen von $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bei den kleinsten Werthen der Differenz Δx mit jenem von $f_1(x)$ übereinstimmt, also im Allgemeinen $f(x)$ innerhalb gewisser, wenn auch einander sehr nahe liegender Grenzen bei dem Wachsen von x wächst oder abnimmt, je nachdem der Differenzialquotient $f_1(x)$ positiv oder negativ ist, wie wir bereits in der vorhergehenden Vorlesung bemerkt haben.

Hieraus folgt, daß die Function $f(x)$, wenn x stufenweise von x_0 in $x_0 + \Delta x_0$ übergeht, sich fortwährend in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wie x ändert, je nachdem $f_1(x)$, innerhalb desselben Intervalles der Werthe des x, stets positiv oder stets negativ bleibt.

Betrachten wir nun die Function $F(z) = f(x + z) - Az^n$, worin A eine beständige Größe und n eine ganze positive Zahl bedeutet, und nehmen wir ihre n ersten auf einander folgenden Differenzialquotienten in Bezug auf die veränderliche Größe z; so haben wir

$$F_1(z) = \frac{dF(z)}{dz} = f_1(x + z) - nAz^{n-1},$$

$$F_2(z) = \frac{dF_1(z)}{dz} = f_2(x + z) - (n-1)nAz^{n-2},$$

$$F_3(z) = \frac{dF_2(z)}{dz} = f_3(x + z) - (n-2)(n-1)nAz^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{n-1}(z) = \frac{dF_{n-2}(z)}{dz} = f_{n-1}(x+z) - 2 \cdot 3 \ldots (n-1)nAz,$$

$$F_n(z) = \frac{dF_{n-1}(z)}{dz} = f_n(x+z) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)nA.$$

Es sey $f(x)$ so beschaffen, daß die Differenzialquotienten $f_1(x)$, $f_2(x)$, ꝛc. bis $f_{n-1}(x)$ für $x = x_0$ verschwinden, so werden sämmtliche Functionen $F_1(z)$, $F_2(z)$, ꝛc. bis $F_{n-1}(z)$ für $x = x_0$ und $z = 0$ auf Null reducirt.

Nehmen wir nun an, A sey im algebraischen Sinne der kleinste Werth, dessen der Quotient $\frac{f_n(x)}{1.2.3...n}$ fähig ist, während die Veränderliche x durch alle denkbaren Zwischenstufen von x_0 in $x_0 + \Delta x_0$ übergeht, wobei wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, Δx_0 eine positive Größe seyn lassen, so ist, wenn hier und in der Folge stets $x = x_0$ gesetzt wird, $F_n(z)$ für alle Werthe der veränderlichen Größe z von o angefangen bis Δx_0 positiv; es wächst also $F_{n-1}(z)$ unter denselben Umständen ununterbrochen. Aber $F_{n-1}(z)$ verschwindet für $z = 0$, daher ist $F_{n-1}(z)$ für alle innerhalb den Grenzen o und Δx_0 liegenden Werthe von z eine positive Größe. Aus demselben Grunde sind auch die höheren Differenzialquotienten $F_{n-2}(z)$, $F_{n-3}(z)$, ... $F_2(z)$, $F_1(z)$ von $z = 0$ bis $z = \Delta x_0$ positive Größen, woraus sich endlich schließen läßt, daß die Function

$$F(z) = f(x + z) - A z^n,$$

wenn $x = x_0$ ist, und z von o angefangen bis Δx_0 fortschreitet, ununterbrochen wächst.

Wird nun der erste Werth der Function $F(z)$, nämlich

$$F(0) = f(x_0),$$

von dem letzten Werthe derselben Function, nämlich von

$$F(\Delta x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - A \Delta x_0^n$$

abgezogen, so muß ein positiver Rest bleiben; d. h. es ist

$$f(x + \Delta x_0) - f(x_0) - A \Delta x_0^n,$$

folglich auch $\frac{f(x + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} - A$

eine positive Größe.

Auf dieselbe Art kann man zeigen, daß wenn A den größten Werth vorstellt, welcher dem Quotienten $\frac{f_n(x)}{1.2.3...n}$ für alle Werthe des x von x_0 bis $x_0 + \Delta x_0$ zu Theil wird,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} - A$$

eine negative Größe ist. Sind also die aus der Function $f(x)$ entspringenden Differenzialquotienten

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ f_3(x_0),\ \ldots\ f_{n-1}(x_0)$$

sämmtlich gleich Null, so fällt, was auch Δx_0 immer für eine positive

Größe bedeuten mag, der Werth des Quotienten $\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n}$ zwischen den größten und kleinsten Werth, welchen $\frac{f_n(x)}{1.2.3\ldots n}$ von $x = x_0$ angefangen bis $x = x_0 + \Delta x_0$ erhält.

Geht $f_n(x)$, bei dieser Veränderung des x, aus jedem Zustande in den nächstfolgenden durch alle denkbaren Zwischenstufen über, so kann man den Quotienten $\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n}$ offenbar als einen der Werthe betrachten, welchen die Function

$$\frac{f_n(x_0 + \theta \Delta x_0)}{1.2.3\ldots n}$$

annimmt, indem θ von der Nulle zur Einheit durch alle möglichen Zwischenstufen fortschreitet. Mit leichter Mühe gelangt man zu demselben Resultate, wenn Δx_0 einen negativen Werth besitzt; es besteht demnach, wenn θ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Zahl anzeigt, unter der oben ausgesprochenen Voraussetzung

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = f_3(x_0) = \text{rc.} = f_{n-1}(x_0) = 0$$

die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} = \frac{f_n(x_0 + \theta \Delta x_0)}{1.2.3\ldots n}.$$

Aus dieser Gleichung folgen sogleich die in der vorhergehenden Vorlesung auf einem anderen Wege gewonnenen Ergebnisse. Lassen wir nämlich in derselben Δx_0 in den Zustand des unendlichen Abnehmens übergehen, so wird

$$lim. \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0^n} = lim. \frac{f_n(x_0 + \theta \Delta x_0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{f_n(x_0)}{1.2.3\ldots n}.$$

Eben so ist für $F_1(x_0) = F_2(x_0) = F_3(x_0) = \text{rc.} = F_{n-1}(x_0) = 0$

$$lim. \frac{F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0)}{\Delta x^n} = \frac{F_n(x_0)}{1.2.3\ldots n},$$

folglich $$lim. \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0)} = \frac{f_n(x_0)}{F_n(x_0)};$$

und wenn auch $f(x_0)$ und $F(x_0)$ gleich Null sind:

$$\frac{f(x_0)}{F(x_0)} = \frac{f_n(x_0)}{F_n(x_0)};$$

alles, wie wir es in der vorhergehenden Vorlesung gefunden haben.

Setzen wir in der Gleichung (1) $x_0 = o$; nehmen wir ferner an, es sey $f(o) = o$, und schreiben wir F statt f, und Δx statt Δx_0, so erhalten wir

$$(2) \qquad F(\Delta x) = \frac{F_n(\theta \Delta x) \cdot \Delta x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n};$$

vorausgesetzt, daß sowohl die Function $F(\Delta x)$, als auch ihre $n-1$ anfänglichen Differenzialquotienten $F_1(\Delta x)$, $F_2(\Delta x)$, ꝛc. bis $F_{n-1}(\Delta x)$ für $\Delta x = o$ verschwinden.

Die Gleichung (2) führt uns sogleich zur Bestimmung des Restes der Taylor'schen Reihe. Denn setzen wir

$$F(\Delta x) =$$

$$= f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x) \cdot \Delta x - \frac{1}{1 \cdot 2} f_2(x) \cdot \Delta x^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_3(x) \cdot \Delta x^3 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f_{n-1}(x) \cdot \Delta x^{n-1},$$

so haben wir durch fortgesetztes Differenziren in Bezug auf Δx:

$$F_1(\Delta x) = f_1(x+\Delta x) - f_1(x) - f_2(x) \cdot \Delta x - \frac{1}{1 \cdot 2} f_3(x) \cdot \Delta x^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)} f_{n-1}(x) \cdot \Delta x^{n-2}$$

$$F_2(\Delta x) = f_2(x+\Delta x) - f_2(x) - f_3(x) \cdot \Delta x - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-3)} f_{n-1}(x) \cdot \Delta x^{n-3}$$

$$F_3(\Delta x) = f_3(x+\Delta x) - f_3(x) - \ldots - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-4)} f_{n-1}(x) \cdot \Delta x^{n-4}$$

u. s. w.

$$F_{n-1}(\Delta x) = f_{n-1}(x+\Delta x) - f_{n-1}(x)$$
$$F_n(\Delta x) = f_n(x+\Delta x).$$

Da nun hier die Functionen $F(\Delta x)$, $F_1(\Delta x)$, $F_2(\Delta x)$, $F_3(\Delta x)$ ꝛc. bis $F_{n-1}(\Delta x)$ wirklich für $\Delta x = o$ verschwinden, so kann die Gleichung (2) angewendet werden. Sie gibt, da $F_n(\theta \Delta x)$ in unserem Falle $= f_n(x + \theta \Delta x)$ ist:

$$f(x+\Delta x) - f(x) - f_1(x) \cdot \Delta x - \frac{1}{1 \cdot 2} f_2(x) \cdot \Delta x^2 - \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f_{n-1}(x) \cdot \Delta x^{n-1} = \frac{f_n(x+\theta \Delta x) \cdot \Delta x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}; \text{ d. h.}$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f_1(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{1 \cdot 2} f_2(x) \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_3(x) \cdot \Delta x^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f_{n-1}(x) \cdot \Delta x^{n-1} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f_n(x+\theta \Delta x) \cdot \Delta x^n,$$

wobei θ eine ganze positive, die Einheit nicht übertreffende Zahl anzeigt. Es ist also die Ergänzung der Taylor'schen Reihe auf eine leicht zu beurtheilende Form zurückgeführt worden.

Die Taylor'sche Formel kann zur Entwickelung der Functionen in Reihen gebraucht werden, wenn die Differenziationsregeln dieser Functionen unabhängig von genannter Entwickelung bewiesen worden sind.

Noch dienlicher ist hiezu oft die Maclaurin'sche Formel, welche man leicht aus der Taylor'schen erhält, wenn man in derselben $x=0$ setzt, und sodann der Einfachheit wegen den Buchstaben x statt Δx schreibt. Sie ist

$$f(x) = f(0) + f_1(0) \cdot x + \frac{f_2(0) \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{f_3(0) \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$
$$\ldots + \frac{f_{n-1}(0) \cdot x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} + \frac{f_n(\theta x) \cdot x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Wir haben z. B. in der drei- und vier und vierzigsten Vorlesung unabhängig von der Entwickelung in Reihen bewiesen, daß für $f(x) = sin. x$ die Gleichungen $f_1(x) = cos. x$, $f_2(x) = -sin. x$, $f_3(x) = -cos. x$, $f_4(x) = sin. x$, u. s. w. Statt finden. Es ist also $f(0)=0$, $f_1(0)=1$, $f_2(0)=0$, $f_3(0)=-1$, $f_4(0)=0$, etc., daher

$$sin. x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+1)}$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1} sin. (\theta x) \cdot x^{2n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+2)},$$

wobei die Convergenz der Reihe für jeden Werth von x aus der Form der Ergänzung sogleich in die Augen fällt.

Alle in dem Vorhergehenden vorgetragenen Schlüsse setzen voraus, daß die veränderliche Größe x keinen particulären Werth erhalte, für welchen entweder die Function $f(x)$ selbst, oder die Differenzialquotienten $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, etc. von irgend einer Stelle angefangen unendlich werden. Tritt dieser Fall ein, so wird $f(x+\Delta x)$, obschon dieser Größe ein bestimmter, angebbarer Werth zukommt, durch unbestimmte Größen dargestellt, woraus zu ersehen ist, daß die Entwickelung der Function $f(x+\Delta x)$ in eine nach den steigenden Potenzen von Δx mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe unmöglich ist, sondern dafür eine andere Form gewählt werden muß, wovon man sich durch einfache Beispiele leicht überzeugt.

Die Taylor'sche Formel läßt sich auch auf Functionen mehrerer veränderlicher Größen übertragen. Betrachten wir bloß eine Function zweier veränderlicher Größen $u = f(x, y)$, und entwickeln wir $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nach den steigenden Potenzen von x und y. Sehen wir y vor der Hand als beständig an, so gibt uns die Taylor'sche Formel, wenn wir bei allen Differenziationen dx als constant behandeln:

$$f(x + \Delta x, y) = u + \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

Lassen wir nun hier y in $y + \Delta y$ übergehen, und wenden wir die Taylor'sche Formel auf jedes einzelne Glied dieses Ausdruckes an, indem wir die in der vier und vierzigsten Vorlesung gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, wodurch z. B.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^2 dy}\Delta y + \frac{d^4u}{dx^2 dy^2}\frac{\Delta y^2}{1.2} + \text{ꝛc.}$$

an die Stelle von $\frac{d^2u}{dx^2}$ kömmt, so haben wir:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = u + \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\Delta x\Delta y + \frac{d^2u}{dy^2}\Delta y^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left[\frac{d^3u}{dx^3}\Delta x^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\Delta x^2\Delta y + 3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\Delta x\Delta y^2 + \frac{d^3u}{dy^3}\Delta y^3\right]$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Die numerischen Coefficienten der Glieder der Ausdrücke innerhalb der Klammern stimmen mit den Binomialcoefficienten überein.

Sieben und vierzigste Vorlesung.

Über Lagrange's Umkehrungsformel.

Es sey $u = F(y)$ und $y = f[z + x\varphi(y)]$, wobei F, f, φ wie immer geformte Functionen, und x, z von einander unabhängige veränderliche Größen anzeigen. Man soll u durch eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe ausdrücken, in welcher also die Coefficienten dieser Potenzen Functionen von z allein sind.

Bezeichnen wir die für $x = o$ Statt findenden Werthe der Differenzialquotienten

$$\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ u. s. w.}$$

durch U_1, U_2, U_3, u. s. w.

und den Werth der Function u unter derselben Voraussetzung durch U, so ist nach Maclaurin's Formel

$$u = U + U_1 x + \frac{U_2 x^2}{1.2} + \frac{U_3 x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots$$

Es kommt also darauf an, U, U_1, U_2, U_3, ... durch z darzustellen.

Da y für $x = o$ in $f(z)$ übergeht, so hat man erstlich

$$U = F[f(z)].$$

Man differenzire nun die Function $u = F(y)$, und erhalte hiedurch

$$du = F_1(y)\, dy,$$

so ergibt sich, weil y eine Function von x und z, also

$$dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dz} dz \text{ ist,}$$

$$du = F_1(y) \frac{dy}{dx} dx + F_1(y) \frac{dy}{dz} dz,$$

woraus die partiellen Differenzialquotienten

$$\frac{du}{dx} = F_1(y) \frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{du}{dz} = F_1(y) \frac{dy}{dz} \text{ folgen.}$$

Wie man leicht sieht, findet unter denselben folgende Gleichung Statt:

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Da bei dem Differenziren von $y = f[z + x\varphi(y)]$ der Ausdruck $z + x\varphi(y)$ sich wie eine einzelne veränderliche Größe verhält, so kann man

$$dy = f_1[z + x\varphi(y)]\, d[z + x\varphi(y)],$$

oder, wenn man $d\varphi(y) = \varphi_1(y)\, dy$ seyn läßt,

$$dy = f_1[z + x\varphi(y)] \cdot [dz + \varphi(y)\, dx + x\varphi_1(y)\, dy]$$

setzen. Aus dieser Gleichung folgt

$$dy = \frac{f_1[z + x\varphi(y)] \cdot \varphi(y)}{1 - x\varphi_1(y) \cdot f_1[z + x\varphi(y)]} dx + \frac{f_1[z + x\varphi(y)]}{1 - x\varphi_1(y) \cdot f_1[z + x\varphi(y)]} dz,$$

daher hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1[z + x\varphi(y)] \cdot \varphi(y)}{1 - x\varphi_1(y) \cdot f_1[z + x\varphi(y)]}$$

und $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{f_1[z + x\varphi(y)]}{1 - x\varphi_1(y) \cdot f_1[z + x\varphi(y)]}$, also

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{dy}{dz}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{du}{dz}.$$

Für $x = 0$ wird $\dfrac{dy}{dz} = f_1(z)$,

folglich $\dfrac{du}{dz} = F_1[f(z)] \cdot f_1(z)$,

und demnach $U_1 = \varphi[f(z)] \cdot F_1[f(z)] \cdot f_1(z)$.

Es läßt sich immerhin eine Function von y denken, deren Differenzial $= \varphi(y) \cdot F_1(y) \cdot dy = \varphi(y) . du$ ist. Bezeichnen wir diese Function durch u_1, so haben wir

$$\frac{du_1}{dz} = \varphi(y) \cdot \frac{du}{dz},$$

folglich wegen (3)

$$\frac{du}{dx} = \frac{du_1}{dz},$$

und hieraus

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d \cdot \frac{du_1}{dz}}{dx} = \frac{d \cdot \frac{du_1}{dx}}{dz}.$$

Aber der Gleichung (3) liegt bloß die Voraussetzung, daß u eine Function von y ist, zum Grunde, ohne die Form dieser Function

näher anzugeben. Die erwähnte Gleichung läßt sich daher auch auf die Function u_1 anwenden, und es ist somit

$$\frac{du_1}{dx} = \varphi(y) \frac{du_1}{dz},$$

folglich $$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d\left[\varphi(y) \frac{du_1}{dz}\right]}{dz}, \text{ oder}$$

(4) $$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d\left[\varphi(y)^2 \frac{du}{dz}\right]}{dz}.$$

Diese Gleichung verhilft uns zu dem Werthe von U_2. Wir finden

$$U_2 = \frac{d[\varphi(f(z))^2 F_1(f(z)) f_1(z)]}{dz}.$$

Betrachten wir ferner $\varphi(y)^2 . \frac{du}{dz}$ als den auf z sich beziehenden partiellen Differenzialquotienten einer Function von y, die wir u_2 nennen wollen, so haben wir wegen (4)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d . \frac{du_2}{dz}}{dz} = \frac{d^2 u_2}{dz^2},$$

folglich $$\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{d . \frac{d^2 u_2}{dz^2}}{dx} = \frac{d^2 . \frac{du_2}{dx}}{dz^2}.$$

Nun ist nach (3) $\frac{du_2}{dx} = \varphi(y) . \frac{du_2}{dz}$, daher besteht die Gleichung

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{d^2\left[\varphi(y) . \frac{du_2}{dz}\right]}{dz^2} \text{ oder}$$

(5) $$\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{d^2\left[\varphi(y)^3 . \frac{du}{dz}\right]}{dz^2}.$$

Aus derselben ergibt sich

$$U_3 = \frac{d^2[\varphi(f(z))^3 F_1(f(z)) f_1(z)]}{dz^2}.$$

Aus dem unveränderlichen Gange dieser Rechnung erhellet, daß überhaupt

(6) $$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left[\varphi(y)^n \frac{du}{dz}\right]}{dz^{n-1}},$$

folglich $U_n = \frac{d^{n-1}[\varphi(f(z))^n F_1(f(z)) f_1(z)]}{dz^{n-1}}$

seyn muß.

Ist also $y = f[z + x\varphi(y)]$, so hat man im Allgemeinen

(7) $$F(y) = F(f(z)) + \varphi(f(z)) F_1(f(z)) \cdot f_1(z) \cdot x$$
$$+ \frac{d[\varphi(f(z))^2 \cdot F_1(f(z)) f_1(z)]}{dz} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$
$$+ \frac{d^2[\varphi(f(z))^3 \cdot F_1(f(z)) f_1(z)]}{dz^2} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \frac{d^3[\varphi(f(z))^4 \cdot F_1(f(z)) f_1(z)]}{dz^3} \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Wenn bloß $y = z + x\varphi(y)$ ist, so hat man $f(y) = y$, also auch $f(z) = z$ und $f_1(z) = 1$, folglich

(8) $$F(y) = F(z) + \varphi(z) \cdot F_1(z) \cdot x$$
$$+ \frac{d[\varphi(z)^2 \cdot F_1(z)]}{dz} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$
$$+ \frac{d^2[\varphi(z)^3 \cdot F_1(z)]}{dz^2} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \frac{d^3[\varphi(z)^4 \cdot F_1(z)]}{dz^3} \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Diese Formeln verdanken wir den Bemühungen Lagrange's und Laplace's. Man kann der letzteren (8), welche unter der Form, wenn $x = 1$ ist, zuerst von Lagrange aufgestellt wurde, füglich den Namen dieses großen Analysten beilegen.

Wir wollen nun von den gefundenen Resultaten zur Auflösung des unter dem Namen der Umkehrung der Reihen bekannten Problems nach Johann Friedrich Pfaff's Anleitung (Disquisitiones analyticae. *Helmstadii* 1797, pag. 252) Gebrauch machen.

Es sey x durch y mittelst der Reihe

(9) $$x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \ldots\ldots,$$

in welcher die Coefficienten $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ von y unabhängig sind, gegeben; man soll y durch x in einer nach Potenzen der letzteren Größe fortschreitenden Reihe darstellen.

Man setze

$$a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \ldots\ldots = \psi(y),$$

wobei ψ als Functionszeichen gebraucht wird, so ist vermöge (9)

$$x = \psi(y),$$

welcher Gleichung man auch die Form

$$y = x \cdot \frac{y}{\psi(y)}$$

ertheilen kann. Läßt man nun in (8)

$$z = 0, \quad \varphi(y) = \frac{y}{\psi(y)} \text{ und } F(y) = \varphi(y)$$

seyn, so ergibt sich, da wegen

$$\varphi(z)^r \cdot \varphi_1(z) = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{d\varphi(z)^{r+1}}{dz}$$

offenbar $\frac{d^{r-1}[\varphi(z)^r \cdot \varphi_1(z)]}{dz^{r-1}} = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{d^r[\varphi(z)^{r+1}]}{dz^r}$

ist, wenn man der Kürze wegen den Differenzialquotienten $\frac{d^r[\varphi(z)^{r+1}]}{dz^r}$ durch $\Phi_r(z)$ bezeichnet:

$$\frac{y}{\psi(y)} = \varphi(0) + \tfrac{1}{2}\Phi_1(0) \cdot x + \tfrac{1}{3}\Phi_2(0) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \tfrac{1}{4}\Phi_3(0) \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\dots$$

Nun findet man, wenn man in

$$\varphi(y) = \frac{y}{\psi(y)} = \frac{1}{a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \dots\dots}$$

$y = 0$ setzt: $\qquad \varphi(0) = a_1^{-1} = \Phi_0;$

ferner hat man

$$\varphi(y)^{r+1} = \left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^{r+1} = (a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \dots\dots)^{-(r+1)};$$

also, wenn man sich die Potenz

$$(a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \dots\dots)^{-(r+1)},$$

allenfalls durch fortgesetzte Anwendung des binomischen Lehrsatzes, entwickelt denkt, und das Resultat dieser Entwickelung durch

$$\overset{-(r+1)}{A}_1 + \overset{-(r+1)}{A}_2 y + \overset{-(r+1)}{A}_3 y^2 + \overset{-(r+1)}{A}_4 y^3 + \dots\dots\dots$$

vorstellt:

$$\varphi(y)^{r+1} = \overset{-(r+1)}{A}_1 + \overset{-(r+1)}{A}_2 y + \overset{-(r+1)}{A}_3 y^2 + \overset{-(r+1)}{A}_4 y^3 + \dots\dots\dots,$$

und hieraus

$$\Phi_r(y) = \frac{d^r[\varphi(y)^{r+1}]}{dy^r}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1) r \overset{-(r+1)}{A}_{r+1} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r(r+1) \overset{-(r+1)}{A}_{r+2} y + \text{etc.},$$

folglich $\Phi_r(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots (r-1) r \overset{-(r+1)}{A}_{r+1}$.

Es ist demnach

$$\frac{y}{\psi(y)} = \overset{-1}{A}_1 + \tfrac{1}{2}\overset{-2}{A}_2 x + \tfrac{1}{3}\overset{-3}{A}_3 x^2 + \tfrac{1}{4}\overset{-4}{A}_4 x^3 + \dots\dots\dots,$$

oder wegen $\psi(y) = x$

$$(10)\quad y = \overset{-1}{A}_1 x + \tfrac{1}{2}\overset{-2}{A}_2 x^2 + \tfrac{1}{3}\overset{-3}{A}_3 x^3 + \tfrac{1}{4}\overset{-4}{A}_4 x^4 + \dots\dots\dots$$

die verlangte durch Umkehrung von (9) entstehende Reihe.

Will man sogleich irgend eine Potenz von y, z. B. y^m durch x ausdrücken, so findet man auf dem hier betretenen Wege, wenn man in der obigen Rechnung $F(y) = \varphi(y)^m$ annimmt,

$$(11)\quad y^m = \overset{-m}{A}_1 x^m + \frac{m}{m+1}\overset{-m-1}{A}_2 x^{m+1} + \frac{m}{m+2}\overset{-m-2}{A}_3 x^{m+2} + \frac{m}{m+3}\overset{-m-3}{A}_4 x^{m+3} + \text{etc.}$$

Es kommt also Alles auf die Bildung der Coefficienten der Entwickelung jeder beliebigen Potenz einer Reihe, wie

$$(12)\quad a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \dots\dots\dots = f(y)$$

ist, an. Zu dieser Bildung kann die Maclaurin'sche Formel benützt werden. Setzt man

$$(13)\quad (a_1+a_2y+a_3y^2+a_4y^3+\dots)^n = \overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 y + \overset{n}{A}_3 y^2 + \overset{n}{A}_4 y^3 + \dots = \mathfrak{F}(y),$$

so gibt diese Formel mit Beibehaltung der bisher gebrauchten Bezeichnung der Differenzialquotienten:

$$\overset{n}{A}_1 = \mathfrak{F}(0),$$
$$\overset{n}{A}_2 = \mathfrak{F}_1(0),$$
$$\overset{n}{A}_3 = \frac{1}{1.2}\mathfrak{F}_2(0),$$
$$\overset{n}{A}_4 = \frac{1}{1.2.3}\mathfrak{F}_3(0)$$

u. s. w.

Nun ist $\mathfrak{F}(y) = f(y)^n$, folglich

$$\mathfrak{F}_1(y) = n f(y)^{n-1} f_1(y),$$
$$\mathfrak{F}_2(y) = n(n-1) f(y)^{n-2} f_1(y)^2 + n f(y)^{n-1} f_2(y),$$
$$\mathfrak{F}_3(y) = n(n-1)(n-2) f(y)^{n-3} f_1(y)^3 + 3n(n-1) f(y)^{n-2} f_1(y) f_2(y) + n f(y)^{n-1} f_3(y)$$

u. s. w.,

wobei
$$f_1(y) = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 + 4a_5 y^3 + \dots$$
$$f_2(y) = 2a_3 + 2.3a_4 y + 3.4a_5 y^2 + \dots$$
$$f_3(y) = 2.3a_4 + 2.3.4a_5 y + \dots$$

u. s. w.

ist. Hiedurch findet man

$$(14)\quad \overset{n}{A}_1 = a_1^n,$$

$$\overset{n}{A}_2 = n\, a_1^{n-1} a_2,$$

$$\overset{n}{A}_3 = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, a_1^{n-2} a_2^2 + n\, a_1^{n-1} a_3,$$

$$\overset{n}{A}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, a_1^{n-3} a_2^3 + n(n-1)\, a_1^{n-2} a_2 a_3 + n a_1^{n-1} a_4$$

u. s. w.

Zwischen den Coefficienten $\overset{n}{A}_1$, $\overset{n}{A}_2$, $\overset{n}{A}_3$, $\overset{n}{A}_4$, ... welche man die Polynomialcoefficienten zu nennen pflegt, finden einfache Relationen Statt, vermöge welchen jeder spätere derselben aus den bereits bekannten früheren berechnet werden kann. Diese lassen sich mit Hülfe der zu solchen Zwecken höchst anwendbaren Differenzialrechnung auf folgende Art finden.

Differenzirt man die Gleichung (13), so erhält man

$$n(a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \ldots)^{n-1}(a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 + \ldots) =$$
$$= \overset{n}{A}_2 + 2\overset{n}{A}_3 y + 3\overset{n}{A}_4 y^2 + \ldots\ldots;$$

daher, wenn man beiderseits mit $a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \ldots$ multiplicirt, und auf (13) Rücksicht nimmt,

$$n(\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 y + \overset{n}{A}_3 y^2 + \overset{n}{A}_4 y^3 + \ldots)(a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 + \ldots) =$$
$$= (\overset{n}{A}_2 + 2\overset{n}{A}_3 y + 3\overset{n}{A}_4 y^2 + \ldots)(a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \ldots).$$

Ordnet man beide Theile dieser Gleichung nach den steigenden Potenzen von y, so findet man, da die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen dieser Größe diesseits und jenseits des Gleichheitszeichens übereinstimmen müssen,

$$a_1 \overset{n}{A}_2 = n a_2 \overset{n}{A}_1$$

$$2a_1 \overset{n}{A}_3 + a_2 \overset{n}{A}_2 = n a_2 \overset{n}{A}_2 + 2n a_3 \overset{n}{A}_1$$

$$3a_1 \overset{n}{A}_4 + 2a_2 \overset{n}{A}_3 + a_3 \overset{n}{A}_2 = n a_2 \overset{n}{A}_3 + 2n a_3 \overset{n}{A}_2 + 3n a_4 \overset{n}{A}_1$$

u. s. w.,

also

$$\overset{n}{A}_2 = \frac{n\,a_2\,\overset{n}{A}_1}{a_1}$$

$$\overset{n}{A}_3 = \frac{(n-1)\,a_2\,\overset{n}{A}_2 + 2\,n\,a_3\,\overset{n}{A}_1}{2\,a_1}$$

$$\overset{n}{A}_4 = \frac{(n-2)\,a_2\,\overset{n}{A}_3 + (2n-1)\,a_3\,\overset{n}{A}_2 + 3\,n\,a_4\,\overset{n}{A}_1}{3\,a_1}$$

u. s. w.

Alle in dieser Vorlesung angestellten Rechnungen gelten jedoch nur unter der Voraussetzung, daß sowohl die gegebenen als auch die gefundenen Reihen convergiren.

Acht und vierzigste Vorlesung.

Über das Zerlegen gebrochener rationaler Functionen einer veränderlichen Größe in Partialbrüche.

Der Umstand, daß mehrere gebrochene Functionen durch das bekannte Verfahren, nämlich durch Reduction auf einen gemeinschaftlichen Nenner und Addition der diesem entsprechenden Zähler in einen einzigen Bruch zusammengezogen werden können, veranlaßt uns die für das Folgende sehr wichtige Untersuchung vorzunehmen, ob es nicht umgekehrt möglich ist, eine gebrochene Function $\frac{f(x)}{F(x)}$, deren Zähler und Nenner ganze rationale, keinen gemeinschaftlichen Theiler gestattende Functionen der veränderlichen Größe x sind, und deren Nenner sich in die ganzen rationalen Factoren $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, $\Omega(x)$, rc. auflösen läßt, in rationale Theile

$$\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},\quad \frac{\psi(x)}{\Psi(x)},\quad \frac{\omega(x)}{\Omega(x)},\ \text{rc.}\ ^{*})$$

oder sogenannte Partialbrüche, welche ebenfalls ganze Functionen von x zu Zählern haben, zu zerfällen, dergestalt, daß unter der Voraussetzung

$$F(x) = \Phi(x)\ .\ \Psi(x)\ .\ \Omega(x)\ .\ \text{rc.}$$

die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)} + \frac{\omega(x)}{\Omega(x)} + \text{rc.}$$

besteht.

Es ist hier hinreichend nachzuweisen, wie sich irgend eine der unbekannten ganzen rationalen Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\omega(x)$, rc. z. B. $\varphi(x)$ bestimmen läßt.

Der Kürze wegen sey das Product

$$\Psi(x)\ .\ \Omega(x)\ \ldots\ldots = \Gamma(x),$$

also $$F(x) = \Phi(x)\ .\ \Gamma(x)$$

und $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \frac{\gamma(x)}{\Gamma(x)};$$

---

*) Daß hier die Buchstaben Φ, φ, Ψ, ψ, Ω, ω, u. d. gl. Functionszeichen sind, fällt in die Augen.

so haben wir, nach Wegschaffung der Brüche,

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \Gamma(x) + \gamma(x) \cdot \Phi(x),$$

und hieraus

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - \gamma(x) \cdot \Phi(x)}{\Gamma(x)}.$$

Unsere Aufgabe ist offenbar gelöst, wenn wir im Stande sind, die unbekannte Function $\gamma(x)$ so zu wählen, daß $f(x) - \gamma(x) \cdot \Phi(x)$ durch $\Gamma(x)$ ohne Rest getheilt werden kann. Da aber dieses zu leisten nicht weniger schwierig ist, als $\varphi(x)$ selbst zu finden, so wollen wir vielmehr die Function $\gamma(x)$ gänzlich beseitigen. Hiezu sind uns die Werthe von x behülflich, für welche die Function $\Phi(x)$, mit welcher $\gamma(x)$ multiplicirt erscheint, verschwindet.

Es seyen a_1, a_2, a_3, ... a_p die wie immer beschaffenen Wurzeln der Gleichung $\Phi(x) = 0$, der wir also den p^{ten} Grad beilegen, und es werde eine derselben, z. B. a_1 statt x in dem obigen Ausdrucke für $\varphi(x)$ gesetzt, so haben wir

$$\varphi(a_1) = \frac{f(a_1)}{\Gamma(a_1)}.$$

Hier kann $f(a_1)$, nicht $= 0$ werden, da $f(x)$ und $F(x)$, folglich auch $f(x)$ und $\Phi(x)$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Damit wir uns aber nicht der Gefahr aussetzen, wegen des allenfalls Statt findenden Verschwindens von $\Gamma(a_1)$, für $\varphi(a_1)$ einen unendlichen Werth zu erhalten, wollen wir noch annehmen, daß auch $\Phi(x)$ und $\Gamma(x)$ keinen von x abhängenden gemeinschaftlichen Factor besitzen.

Nun ist

$$\varphi(x) - \varphi(a_1) = \frac{f(x) - \varphi(a_1)\Gamma(x) - \gamma(x)\Phi(x)}{\Gamma(x)}.$$

Der erste Theil $\varphi(x) - \varphi(a_1)$ dieser Gleichung wird für $x = a_1$ auf Null reducirt, und ist deßwegen durch $x - a_1$ ohne Rest theilbar; es muß also das Nämliche auch mit dem zweiten Theile derselben geschehen können; folglich muß, da $\Phi(x)$ ohnehin den Factor $x - a_1$ enthält, auch $f(x) - \varphi(a_1)\Gamma(x)$ durch $x - a_1$ theilbar seyn.

Setzen wir $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a_1)}{x - a_1} = \overset{1}{\varphi}(x)$,

$$\frac{f(x) - \varphi(a_1)\Gamma(x)}{x - a_1} = \overset{1}{f}(x),$$

$$\frac{\Phi(x)}{x - a_1} = \overset{1}{\Phi}(x),$$

so ist

$$\overset{1}{\varphi}(x) = \frac{\overset{1}{f}(x) - \gamma(x)\overset{1}{\Phi}(x)}{\Gamma(x)}.$$

Lassen wir hier $x = a_2$ seyn, so ergibt sich wegen $\overset{1}{\Phi}(a_2) = 0$

$$\overset{1}{\varphi}(a_2) = \frac{\overset{1}{f}(a_2)}{\Gamma(a_2)},$$

wobei der gemachten Voraussetzung zu Folge $\Gamma(x)$ von 0 verschieden ist. Die Gleichung

$$\overset{1}{\varphi}(x) - \overset{1}{\varphi}(a_2) = \frac{\overset{1}{f}(x) - \overset{1}{\varphi}(a_2)\,\Gamma(x) - \gamma(x)\overset{1}{\Phi}(x)}{\Gamma(x)}$$

ist durch $x - a_2$ ohne Rest theilbar, und bietet, wenn wir

$$\frac{\overset{1}{\varphi}(x) - \overset{1}{\varphi}(a_2)}{x - a_2} = \overset{2}{\varphi}(x);\quad \frac{\overset{1}{f}(x) - \overset{1}{\varphi}(a_2)\,\Gamma(x)}{x - a_2} = \overset{2}{f}(x);\quad \frac{\overset{1}{\Phi}(x)}{x - a_2} = \overset{2}{\Phi}(x)$$

setzen, den Quotienten

$$\overset{2}{\varphi}(x) = \frac{\overset{2}{f}(x) - \gamma(x)\overset{2}{\Phi}(x)}{\Gamma(x)}.$$

dar, auf welchen sich nach der Substitution $x = a_3$ dieselben Schlüsse anwenden lassen. Führen wir die Rechnung mit der begonnenen Bezeichnung fort, so kommen wir endlich auf die Gleichung

$$\overset{p-1}{\varphi}(x) = \frac{\overset{p-1}{f}(x) - \gamma(x)\overset{p-1}{\Phi}(x)}{\Gamma(x)}.$$

Sie gibt uns für $x = a_p$

$$\overset{p-1}{\varphi}(a_p) = \frac{\overset{p-1}{f}(a_p)}{\Gamma(a_p)}.$$

Der Quotient $\dfrac{\overset{p-1}{\Phi}(x)}{x - a_p}$ ist eine beständige Größe, nämlich der Coefficient der höchsten Potenz von x im Polynome $\Phi(x)$, welchen wir K nennen wollen; setzen wir noch

$$\frac{\overset{p-1}{\varphi}(x) - \overset{p-1}{\varphi}(a_p)}{x - a_p} = \overset{p}{\varphi}(x) \quad \text{und} \quad \frac{\overset{p-1}{f}(x) - \overset{p-1}{\varphi}(a_p)\,.\,\Gamma(x)}{x - a_p} = \overset{p}{f}(x),$$

so haben wir

$$\overset{p}{\varphi}(x) = \frac{\overset{p}{f}(x) - K\,.\,\gamma(x)}{\Gamma(x)}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung folgt

$$\gamma(x) = \frac{\overset{p}{f}(x) - \overset{p}{\varphi}(x) \,.\, \Gamma(x)}{K},$$

es ist also $\gamma(x)$ eine ganze rationale Function, sobald $\overset{p}{\varphi}(x)$ eine solche ist. Aber $\overset{p}{\varphi}(x)$ ist offenbar eine willkürliche Größe, daher kann man dafür jede beliebige ganze rationale Function von x annehmen. Zugleich geben die obigen Ausdrücke für $\overset{1}{\varphi}(x)$, $\overset{2}{\varphi}(x)$, ꝛc. $\overset{p}{\varphi}(x)$

$$\varphi(x) = \varphi(a_1) + (x - a_1)\,\overset{1}{\varphi}(x),$$

$$\overset{1}{\varphi}(x) = \overset{1}{\varphi}(a_2) + (x - a_2)\,\overset{2}{\varphi}(x),$$

ꝛc.

$$\overset{p-1}{\varphi}(x) = \overset{p-1}{\varphi}(a_p) + (x - a_p)\,\overset{p}{\varphi}(x),$$

also

$$\varphi(x) = \varphi(a_1) + \overset{1}{\varphi}(a_2) \,.\, (x - a_1) + \overset{2}{\varphi}(a_3) \,.\, (x - a_1)(x - a_2)$$
$$+ \overset{3}{\varphi}(a_4) \,.\, (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \overset{p-1}{\varphi}(a_p) \,.\, (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots\ldots (x - a_{p-1})$$
$$+ \overset{p}{\varphi}(x) \,.\, (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots\ldots (x - a_p).$$

Substituirt man diese Ausdrücke für $\varphi(x)$ und $\gamma(x)$ in die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \frac{\gamma(x)}{\Gamma(x)},$$

und bedenkt man, daß

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_p) = \frac{\Phi(x)}{K}$$

ist, so fällt die Function $\overset{p}{\varphi}(x)$ aus derselben gänzlich weg, und man hat im Grunde dasselbe Resultat vor sich, welches sich ergeben hätte, wenn oben sogleich $\overset{p}{\varphi}(x) = 0$ angenommen worden wäre. Man hat daher zur Auflösung des vorgelegten Problems

$$\varphi(x) = \frac{f(a_1)}{\Gamma(a_1)} + \frac{\overset{1}{f}(a_2)}{\Gamma(a_2)} \,.\, (x - a_1) + \frac{\overset{2}{f}(a_3)}{\Gamma(a_3)} \,.\, (x - a_1)(x - a_2) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{\overset{p-1}{f}(a_p)}{\Gamma(a_p)} \,.\, (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots\ldots (x - a_{p-1})$$

und

$$\gamma(x) = \frac{1}{K} \,.\, \overset{p}{f}(x).$$

Wie aus diesen Formeln erhellet, ist, wenn $\Phi(x)$ zur p^{ten} Ordnung gehört, $\varphi(x)$ höchstens eine Function von der $(p-1)^{ten}$ Ordnung; bezeichnet man ferner den Ordnungsexponenten von $\Gamma(x)$ durch q, und jenen des Zählers $f(x)$ durch m, so ist die Function $\overset{p}{f}(x)$ ihrem Ursprunge gemäß, folglich auch $\gamma(x)$, höchstens von der Ordnung $m-p$, wenn $m-p>q-1$, d. h. $m>p+q-1$ ausfällt, und höchstens von der Ordnung $q-1$, wenn das Gegentheil der so eben ausgesprochenen Bedingung Statt findet. Übrigens kann man, wenn $m>p+q-1$, d. h. wenn der Zähler der vorgelegten gebrochenen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ nicht von niedrigerer Ordnung ist, als der Nenner, dieselbe, indem man den Zähler durch den Nenner so lange theilt, bis man einen Rest erhält, dessen Ordnung von jener des Divisors übertroffen wird, in eine ganze Function oder auch nur in eine beständige Größe und in eine gebrochene Function abtheilen, bei welcher der Zähler einen niedrigeren Ordnungsexponenten führt, als der Nenner, so, daß nur mehr diese letztere in Partialbrüche zu zerlegen ist.

So wie man aus $\frac{f(x)}{F(x)}$ den Partialbruch $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ abgeleitet hat, kann man aus $\frac{\gamma(x)}{\Gamma(x)}$, oder wenn man will, auch unmittelbar aus $\frac{f(x)}{F(x)}$, den zweiten Partialbruch $\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}$ finden, und so fortfahren, bis die Partialbrüche für sämmtliche Factoren von $F(x)$ dargestellt sind.

Es sey nun $\Phi(x)$ einer der unwiederholten einfachen Factoren der Function $F(x)$, und zwar $\Phi(x)=a+bx$. Die einzige Wurzel der Gleichung $\Phi(x)=0$, welche hier in Betrachtung kommt, ist $=-\frac{a}{b}$; nennen wir sie der Kürze wegen α, so haben wir für $\varphi(x)$ den constanten Werth

$$\frac{f(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=A.$$

Die Größe $\Gamma(\alpha)$ läßt sich auch unmittelbar aus $F(x)$ berechnen. Denn es ist

$$\Gamma(x)=\frac{F(x)}{a+bx},$$

welche Function für $x=\alpha$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; folglich nach den Vorschriften der fünf und vierzigsten Vorlesung, wenn $\frac{dF(x)}{dx}=F_1(x)$

332

gesetzt wird:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{F_1(\alpha)}{b}.$$

Hiedurch ergibt sich für den Zähler des in der Frage stehenden Partialbruches der Ausdruck

$$A = \frac{b f(\alpha)}{F_1(\alpha)},$$

dessen Gebrauch die Rechnung erleichtert, wenn $\Gamma(x)$ unbekannt, oder zusammengesetzter ist als $F(x)$.

Kommt der Factor $a + bx$ der Function $F(x)$ öfter als ein Mal, z. B. r Male zu, so kann man $\Phi(x)$ keiner niedrigeren Potenz von $a + bx$, als der r^{ten} gleich setzen, weil sonst $\Phi(x)$ und $\Gamma(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler besäßen. Es sey also $\Phi(x) = (a + bx)^r$, so entsprechen der Gleichung $\Phi(x) = 0$ offenbar r Wurzeln, deren jede $= -\frac{a}{b}$ ist. Nennen wir diese Zahl wieder α, so wird

$$\varphi(x) = \frac{f(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\overset{1}{f}(\alpha)\,.\,(x-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\overset{2}{f}(\alpha)\,.\,(x-\alpha)^2}{\Gamma(\alpha)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\overset{r-1}{f}(\alpha)\,.\,(x-\alpha)^{r-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{f(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\overset{1}{f}(\alpha)\,.\,(a+bx)}{b\,\Gamma(\alpha)} + \frac{\overset{2}{f}(\alpha)\,.\,(a+bx)^2}{b^2\,\Gamma(\alpha)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\overset{r-1}{f}(\alpha)\,.\,(a+bx)^{r-1}}{b^{r-1}\,\Gamma(\alpha)};$$

folglich, wenn wir die beständigen Größen

$$\frac{f(\alpha)}{\Gamma(\alpha)},\quad \frac{\overset{1}{f}(\alpha)}{b\,\Gamma(\alpha)},\quad \frac{\overset{2}{f}(\alpha)}{b^2\,\Gamma(\alpha)},\quad \ldots\ldots \quad \frac{\overset{r-1}{f}(\alpha)}{b^{r-1}\,\Gamma(\alpha)}$$

durch A, A_1, A_2, ... A_{r-1} vorstellen,

$$\frac{\varphi(x)}{(a+bx)^r} = \frac{A}{(a+bx)^r} + \frac{A_1}{(a+bx)^{r-1}} + \frac{A_2}{(a+bx)^{r-2}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{A_{r-1}}{a+bx},$$

wodurch also dieser Partialbruch wieder in einfachere Partialbrüche zerfällt, deren Zähler durchgehends constant sind.

Auch hier läßt sich, wenn man die Differenzialrechnung zu Hülfe nimmt, die Function $\Gamma(x)$ beseitigen.

Man findet wegen $\Gamma(x) = \frac{F(x)}{(a+bx)^r}$ mit Beibehaltung der in

den früheren Vorlesungen gebrauchten Bezeichnung der Differenzialquotienten

$$\Gamma(\alpha) = \frac{F_r(\alpha)}{1.2.3...r.b^r},$$

$$\text{also} \quad A = \frac{1.2.3...r.b^r f(\alpha)}{F_r(\alpha)}.$$

Ferner geben die obigen Formeln, wie man leicht sieht,

$$\overset{1}{f}(x) = b \cdot \frac{(a+bx)^r f(x) - A F(x)}{(a+bx)^{r+1}},$$

$$\text{also} \quad \overset{1}{f}(\alpha) = \frac{1.2.3...(r+1).b^r f_1(\alpha) - A F_{r+1}(\alpha)}{1.2.3...(r+1) b^r}$$

$$\text{und} \quad A_1 = \frac{1.2.3...(r+1).b^r f_1(\alpha) - A F_{r+1}(\alpha)}{(r+1) b^r F_r(\alpha)}$$

u. s. w.

Jede ganze rationale Function $F(x)$ läßt sich durch Auflösung der Gleichung $F(x)=0$ als ein Product von Factoren des ersten Grades darstellen; daher kann auch jede gebrochene rationale Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche mit constanten Zählern und mit Nennern von der Form $(a+bx)^r$ zerlegt werden, wozu sich, wenn der Zähler $f(x)$ von derselben Ordnung ist, wie der Nenner $F(x)$, noch eine beständige Größe, und wenn die Ordnung des ersteren jene des letzteren übersteigt, eine ganze Function der Veränderlichen x gesellt.

Kommen in $F(x)$ keine imaginären Coefficienten der Potenzen von x vor, so lassen sich, falls die Gleichung $F(x)=0$ imaginäre Wurzeln besitzt, die imaginären Nenner der Partialbrüche vermeiden, indem man je zwei zusammengehörige imaginäre Factoren von $F(x)$ in einen reellen Factor des zweiten Grades vereiniget. Es sey $a+bx+cx^2 = \Phi(x)$ ein solcher, der Function $F(x)$ nur ein Mal zukommender Factor, ferner seyen a_1 und a_2 die beiden Werthe von x, welche ihn auf Null reduciren, so geben uns die obigen Formeln

$$\varphi(a_1) = \frac{f(a_1)}{\Gamma(a_1)},$$

$$\overset{1}{f}(a_2) = \frac{f(a_2) - \frac{f(a_1)}{\Gamma(a_1)} \cdot \Gamma(a_2)}{a_2 - a_1},$$

$$\overset{1}{\varphi}(a_2) = \frac{f(a_2)\cdot\Gamma(a_1) - f(a_1)\,\Gamma(a_2)}{(a_2-a_1)\,\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)},$$

folglich

$$\varphi(x) = \frac{a_2 f(a_1)\Gamma(a_2) - a_1 f(a_2)\Gamma(a_1) + [f(a_2)\Gamma(a_1) - f(a_1)\Gamma(a_2)]x}{(a_2 - a_1)\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}.$$

Man setze nun

$$a_1 = \lambda + \mu\sqrt{-1}, \quad a_2 = \lambda - \mu\sqrt{-1},$$
$$f(a_1) = H + K\sqrt{-1}, \quad f(a_2) = H - K\sqrt{-1},$$
$$\Gamma(a_1) = M + N\sqrt{-1}, \quad \Gamma(a_2) = M - N\sqrt{-1},$$

so wird

$$\varphi(x) = \frac{\mu(HM + KN) - \lambda(KM - HN) + (KM - HN)x}{\mu(M^2 + N^2)}.$$

Da $\Gamma(x) = \frac{F(x)}{a + bx + cx^2}$ ist, so hat man

$$\Gamma(a_1) = \frac{F_1(a_1)}{b + 2ca_1}, \quad \Gamma(a_2) = \frac{F_1(a_2)}{b + 2ca_2}.$$

Setzt man nun $F_1(a_1) = P + Q\sqrt{-1}$, $F(a_2) = P - Q\sqrt{-1}$, und bedenkt man, daß $b = -c(a_1 + a_2)$ ist, so findet man durch Vergleichung beider Ausdrücke für $\Gamma(a_1)$ oder für $\Gamma(a_2)$

$$M = \frac{Q}{2c\mu}, \quad N = -\frac{P}{2c\mu},$$

folglich

$$\varphi(x) = 2c \cdot \frac{\mu(HQ - KP) - \lambda(KQ + HP) + (KQ - HP)x}{P^2 + Q^2}.$$

Ist der Factor $a + bx + cx^2$ in $F(x)$ r Male wiederholt, so zerlege man erstlich $\frac{f(x)}{(a + bx + cx^2)\Gamma(x)}$ in $\frac{\varphi(x)}{a + bx + cx^2}$ und $\frac{\gamma(x)}{\Gamma(x)}$; hierdurch wird

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(a+bx+cx^2)^r\Gamma(x)} = \frac{\varphi(x)}{(a+bx+cx^2)^r} + \frac{\gamma(x)}{(a+bx+cx^2)^{r-1}\Gamma(x)}.$$

Der Theil $\frac{\gamma(x)}{(a + bx + cx^2)^{r-1}\Gamma(x)}$ kann auf dieselbe Art weiter zerlegt werden, u. s. f.

Die Zerlegung einer gebrochenen Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ in die Partialbrüche $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$, $\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}$, $\frac{\omega(x)}{\Omega(x)}$, rc. setzt nach der oben erklärten Methode die Auflösung der Gleichungen $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x) = 0$, rc. voraus. Wollte man diese Auflösung vermeiden, so müßte man sich mit der sogenannten Methode der unbestimmten Coefficienten behelfen. Da man aus dem Vorhergehenden von der Möglichkeit der erwähnten Zerlegung, in dem Falle, wenn keine zwei der Factoren $\Phi(x)$, $\Psi(x)$,

$\Omega(x)$, ꝛc. einen von x abhängenden gemeinschaftlichen Theiler zulassen, überzeugt ist, so setze man

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$
$$\psi(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots$$

u. s. w.,

wobei die Coefficienten A_0, A_1, A_2, ... B_0, B_1, B_2, ... unbekannte Größen bedeuten, und deren so viele vorhanden sind, als der höchst möglichste Grad von $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ꝛc., welchen man nach dem oben Gesagten zu beurtheilen im Stande ist, fordert. Substituirt man nun die für $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ꝛc. angenommenen Polynome in die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)} + \frac{\omega(x)}{\Omega(x)} + \text{ꝛc.},$$

so erhält man nach Wegschaffung der Nenner und gehöriger Entwickelung aller Producte eine Gleichung, welche, wenn die Coefficienten A_0, A_1, A_2, ꝛc. B_0, B_1, B_2, ... bereits bekannt wären, identisch ausfallen würde, folglich die Gleichsetzung der den gleichnamigen Potenzen von x diesseits und jenseits des Gleichheitszeichens zugehörenden Factoren gestattet. Hiedurch ergeben sich nothwendig so viele verschiedene Gleichungen des ersten Grades, als unbekannte Coefficienten da sind; diese können demnach durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren bestimmt werden.

Neun und vierzigste Vorlesung.

Über die Integration der einfachsten Differenzialformeln mit einer veränderlichen Größe.

Jeder Ausdruck von der Form $Pdx + Qdy + Rdz + \ldots$, worin P, Q, R, . . . Functionen von x, y, z, . . . sind, heißt eine Differenzialformel. Da die Differenziation jeder Function veränderlicher Größen auf eine Differenzialformel führt, so bietet sich umgekehrt, wenn eine Differenzialformel in der Rechnung erscheint, die Frage dar, ob es eine Function gibt, durch deren Differenziation sie entsteht, und falls eine solche Function wirklich existirt, wie dieselbe gefunden werden könne. Die hiezu dienende Rechnungsoperation heißt das Integriren, und die gefundene Function das Integral der gegebenen Differenzialformel. Zur Bezeichnung der Integralien bedient man sich des Buchstabens $\int$, welchen man den zu integrirenden Differenzialformeln vorsetzt.

Betrachten wir vor der Hand bloß solche Differenzialformeln, welche sich auf eine einzige veränderliche Größe beziehen. Ihre Form ist Pdx, wobei P, wofür wir $\varphi(x)$ schreiben werden, eine Function von x anzeigt. Läßt sich eine Function $F(x)$ ausmitteln, für welche $dF(x) = \varphi(x) \,.\, dx$ ist, so hat man umgekehrt

$$\int \varphi(x) \,.\, dx = F(x).$$

Allein $F(x)$ ist nicht der allgemeinste Ausdruck des Integrals $\int \varphi(x) \,.\, dx$. Man darf hiezu jede Größe addiren, deren Differenzial $= 0$ ist, denn hiedurch wird der Bedingung, daß das Differenzial des Integrals $= \varphi(x) \,.\, dx$ sey, nicht widersprochen. Die am Anfange der drei und vierzigsten Vorlesung angestellten Betrachtungen zeigen, daß es keine Function von x gibt, deren Differenzial allgemein, d. h. abgesehen von partikulären Werthen dieser Variablen, verschwindet; daher sind die beständigen Größen die einzigen, deren Differenzialien der Nulle gleich kommen, und somit ist im ausgedehntesten Sinne

$$(1) \qquad \int \varphi(x)\, dx = F(x) + Const.,$$

wobei die Constante den jedesmaligen Umständen der zu lösenden Aufgabe gemäß gewählt werden muß. Ihr Werth ist gegeben, sobald man den Betrag des Integrals für einen besonderen Werth der veränderli-

Drei und fünfzigste Vorlesung.

Über die Integration der Differenzialformeln mit mehreren veränderlichen Größen.

Wenn eine Differenzialformel mit einer veränderlichen Größe x, z. B. $\varphi(x)\,dx$, zur Integration vorgelegt wird; so unterliegt die Existenz des unbekannten Integrales, wie man durch die Gleichung (5) der neun und vierzigsten Vorlesung leicht sieht, keinem Zweifel; es kann nämlich immer eine Function von x, z. B. $F(x)$ gedacht, und für jeden beliebigen Werth von x näherungsweise berechnet werden, deren Differenzial $= \varphi(x)\,dx$ ist, wenn gleich es nicht jederzeit angeht, dieselbe in einem geschlossenen, aus den bis jetzt in die Analysis eingeführten algebraischen und transcendenten Größen zusammengesetzten Ausdrucke darzustellen. Anders verhält sich aber die Sache bei Differenzialformeln mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z, ..., welche, in so fern sie vom ersten Grade sind, die Form

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \ldots.$$

haben, wobei P, Q, R, ... Functionen von x, y, z, ... bedeuten. Wofern diese Functionen nicht gewissen Bedingungen Genüge leisten, ist es durchaus unmöglich, daß die vorgelegte Differenzialformel durch Differenziation irgend einer Function der Variablen x, y, z, ... entstehe. Der leichteren Übersicht wegen wollen wir mit den Differenzialformeln, in welchen bloß zwei von einander independente veränderliche Größen erscheinen, den Anfang machen.

Gesetzt es existire eine Function u von x und y, durch deren Differenziation die gegebene Differenzialformel $P\,dx + Q\,dy$ erzeugt wird, so hat man

$$\frac{du}{dx} = P \quad \text{und} \quad \frac{du}{dy} = Q.$$

Zur Bildung des partiellen Differenzialquotienten von u in Bezug auf eine der veränderlichen Größen tragen bloß jene Glieder dieser Function bei, welche von der gedachten Veränderlichen abhängen; integrirt man daher das Differenzial $P\,dx$, in so fern man bloß x als veränderlich, y hingegen als constant behandelt, so findet man mit

Zuverlässigkeit bloß denjenigen Theil der Function u, in welchem x vorkommt, und es ist deßhalb, wenn wir der Kürze wegen

$$\int P\,dx = U$$

setzen,

$$u = U + \psi(y),$$

wobei $\psi(y)$ eine noch zu bestimmende Function von y anzeigt. Um dieselbe kennen zu lernen, differenziren wir die letztere Gleichung in Bezug auf y, so ergibt sich, wenn Q_1 den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dU}{dy}$ vorstellt, wegen $\frac{du}{dy} = Q$ die Gleichung

$$Q = Q_1 + \frac{d\psi(y)}{dy},$$

woraus $\psi(y) = \int (Q - Q_1)\,dy$ folgt.

Soll nun $\psi(y)$ möglich seyn, so darf $Q - Q_1$ die veränderliche Größe x nicht enthalten, denn sonst hat die Integration von $(Q - Q_1)\,dy$ keinen Sinn; es wird also die Existenz der Function u durch den Umstand bedingt, daß $Q - Q_1$ eine Function von y allein ist. Diese Bedingung wird zunächst durch die Gleichung

$$\frac{d(Q - Q_1)}{dx} = 0$$

ausgedrückt. Um dieselbe aber auf unmittelbar gegebene Größen zurückzuführen, geben wir der letztern Gleichung die Gestalt

$$\frac{dQ_1}{dx} = \frac{dQ}{dx}.$$

Da unseren Voraussetzungen gemäß offenbar

$$dU = P\,dx + Q_1\,dy$$

ist, so besteht, wie wir in der vier und vierzigsten Vorlesung gesehen haben, die Gleichung

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ_1}{dx};$$

daher reducirt sich die oben ausgesprochene Bedingung der Existenz eines Integrals für die Differenzialformel $P\,dx + Q\,dy$ auf die Erfüllung der Gleichung

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Wird derselben durch die Functionen P und Q Genüge geleistet, so ist, wenn man statt U und Q_1 die entsprechenden Ausdrücke schreibt:

$$(100)\quad \int (P\,dx + Q\,dy) = \int P\,dx + \int \left(Q - \frac{d\int P\,dx}{dy}\right) dy.$$

Dem letzten Resultate aller hier angezeigten Operationen wird noch eine willkürliche Constante zugesetzt.

Man kann bei dem so eben erklärten Verfahren, wenn sich das Integral $\int Q\,dy$ leichter angeben läßt, als $\int P\,dx$, zuerst in Bezug auf y integriren; daraus erwächst die Formel

$$(101)\quad \int(P\,dx + Q\,dy) = \int Q\,dy + \int\left(P - \frac{d\int Q\,dy}{dx}\right)dx.$$

Wäre P bloß eine Function von x, und Q bloß eine Function von y, so hätte man geradezu

$$\int(P\,dx + Q\,dy) = \int P\,dx + \int Q\,dy.$$

Daß einer Differenzialformel mit zwei veränderlichen Größen $P\,dx + Q\,dy$, wenn $\frac{dP}{dy}$ von $\frac{dQ}{dx}$ verschieden ausfällt, kein Integral entspricht, erhellet unmittelbar aus der in der vier und vierzigsten Vorlesung für jedes Differenzial einer Function u zweier veränderlicher Größen, nämlich $du = p\,dx + q\,dy$, bewiesenen Gleichung $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, daß aber jeder Differenzialformel $P\,dx + Q\,dy$, in Bezug auf welche $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ ist, ein Integral zugehört, d. h. daß die angeführte Bedingung das charakteristische Merkmal der Integrabilität ist, wird erst durch die obige Deduction ersichtlich gemacht.

Der in der Formel (100) vorkommende Ausdruck $\frac{d\int P\,dx}{dy}$, in welchem die Integration auf die Veränderliche x, und die Differenziation auf die von der ersteren unabhängige veränderliche Größe y sich bezieht, kann auch durch Verwechslung beider Operationen in $\int\frac{dP}{dy}dx$ umgestaltet werden. Denn es ist in der obigen Rechnung wegen $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ_1}{dx}$

$$\frac{dU}{dy} = Q_1 = \int\frac{dP}{dy}dx, \text{ d. h.}$$

$$(102)\quad \frac{d\int P\,dx}{dy} = \int\frac{dP}{dy}dx.$$

Diese Gleichung drückt die Zuläßigkeit des in der Integralrechnung sehr brauchbaren Differenzirens unter dem Integralzeichen aus. Gesetzt, man will die Differenzialformel mit einer Variablen, $\varphi(x)\,dx$ integriren, und man ist im Stande das Integral $\int\varphi(x)\,da = \Phi(x, a)$, welches in Beziehung auf eine in $\varphi(x)$ enthaltene Constante a, als wäre sie veränderlich, x hingegen beständig, genommen wird, mit leich-

ter Mühe anzugeben, so kann man, wenn man bequemer zu rechnen meint, zuerst die Differenzialformel $\Phi(x, a)\,dx$ in Bezug auf x integriren, und das erhaltene Resultat sodann in Bezug auf a differenziren. Denn es ist nach (102)

$$\frac{d\int \Phi(x, a)\,dx}{da} = \int \frac{d\Phi(x, a)}{da}\,dx = \int \varphi(x)\,dx.$$

Die Gleichheit der Ausdrücke $\int \varphi(x)\,dx$ und $\frac{d\int \Phi(x, a)\,dx}{da}$ bezieht sich offenbar nur auf die von x abhängigen Theile derselben. Soll übrigens das Integral $\int \varphi(x)\,dx$ für einen von a independenten Werth des x, z. B. für $x = k$ verschwinden, so besitzt $\frac{d\int \Phi(x, a)\,dx}{da}$ dieselbe Eigenschaft, wenn man das Integral $\int \Phi(x, a)\,dx$ so nimmt, daß es gleichfalls für $x = k$ auf Null reducirt wird. Der Größe $\Phi(x, a) = \int \varphi(x)\,da$ kann jede beliebige von a freie Function der Veränderlichen x, z. B. $\psi(x)$ zugesetzt werden; der durch sie herbeigeführte Theil in $\int \Phi(x, a)\,dx$, nämlich $\int \psi(x)\,dx$, fällt bei dem Differenziren in Bezug auf a wieder hinweg.

Die oben erklärte Integrationsmethode der Differenzialformeln mit zwei veränderlichen Größen läßt sich nun leicht auf Differenzialformeln mit mehreren Variablen ausdehnen. Ist

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

zu integriren, so nehme man zuerst das Integral von $P\,dx + Q\,dy$, indem man auf die Veränderlichkeit von z nicht achtet. Damit die Integration möglich sey, muß die Gleichung $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ Statt finden. Das gefundene Integral, welches U heißen mag, bietet den von x und y abhängigen Theil des zu suchenden Integrals

$$\int (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = u$$

dar, so daß

$$u = U + \psi(z)$$

ist, wobei z eine noch auszumittelnde Function von z anzeigt. Setzen wir $\frac{dU}{dz} = R_1$, so haben wir wegen $\frac{du}{dz} = R$

$$R = R_1 + \frac{d\psi(z)}{dz},$$

$$\text{folglich}\quad \psi(z) = \int (R - R_1)\,dz.$$

Soll $\psi(z)$ angebbar seyn, so darf $R - R_1$ weder x noch z enthalten, was nur dann der Fall ist, wenn die Gleichungen

$$\frac{d(R - R_1)}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d(R - R_1)}{dy} = 0,$$

oder $\frac{dR_1}{dx} = \frac{dR}{dx}$ und $\frac{dR_1}{dy} = \frac{dR}{dy}$ bestehen.

Da $dU = Pdx + Qdy + R_1 dz$ ist, so haben wir, wenn wir uns y ungeändert denken, bloß eine Differenzialformel mit den Variablen x und z vor uns, und deßhalb ist $\frac{dP}{dz} = \frac{dR_1}{dx}$. Aus demselben Grunde ist $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR_1}{dy}$, folglich fordert die Existenz von u die Bedingungsgleichungen

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Geschieht denselben Genüge, so ist

$$(103) \qquad \int(Pdx + Qdy + Rdz) =$$
$$= \int(Pdx + Qdy) + \int\left(R - \frac{d\int(Pdx + Qdy)}{dz}\right) dz,$$

in welcher Formel man auch P oder Q mit R verwechseln kann, wenn man nur zugleich x oder y an die Stelle von z treten läßt. Auf dieselbe Weise wird man Differenzialformeln mit vier, fünf veränderlichen Größen u. s. w. behandeln. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen der Integrabilität ist nothwendig so groß als die Anzahl der Amben, welche zwischen den vorhandenen Variablen möglich sind, also für n Variable $= \frac{n(n-1)}{2}$.

Die sogenannten homogenen Differenzialformeln mit mehreren veränderlichen Größen verstatten, falls sie integrabel sind, im Allgemeinen eine höchst einfache Integration. Man nennt überhaupt eine Function mehrerer veränderlicher Größen x, y, z, ... eine homogene, wenn sie durch die Substitutionen $x = t\xi$, $y = tv$, $z = t\zeta$, ... in zwei Factoren zerfällt, wovon der eine von t nicht abhängt, und der andere eine Potenz von t ist. Der Exponent dieser Potenz, welcher was immer für eine Zahl seyn kann, heißt der Ordnungsexponent der homogenen Function. Ist also $f(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function von der Ordnung n, so besteht die Gleichung

$$f(t\xi, tv, t\zeta, \ldots) = t^n f(\xi, v, \zeta, \ldots).$$

Solche Functionen sind alle Ausdrücke von den Formen

$$\sqrt[r]{A x^a y^b z^c \ldots + B x^g y^h z^k \ldots + \ldots}$$

$$\text{und}\quad \frac{\sqrt[r]{A x^a y^b z^c \ldots . + B x^g y^h z^k \ldots . + \ldots .}}{\sqrt[s]{\mathfrak{A} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} \ldots . + \mathfrak{B} x^{\mathfrak{g}} y^{\mathfrak{h}} z^{\mathfrak{k}} \ldots . + \ldots .}},$$

wobei die Coefficienten $A, B, \ldots . \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots .$ kein x enthalten, wenn sowohl

$$a + b + c + \ldots = g + h + k + \ldots = \text{rc.}$$

als auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \ldots = \mathfrak{g} + \mathfrak{h} + \mathfrak{k} + \ldots = \text{rc.}$

ist. Der Ordnungsexponent des ersteren Ausdruckes wird durch die Zahl $\frac{a+b+c+\ldots}{r}$, und der des letzteren durch $\frac{a+b+c+\ldots}{r} - \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\ldots}{s}$ angegeben.

Eine Differenzialformel $P dx + Q dy + R dz + \ldots .$ wird eine **homogene** genannt, wenn $P, Q, R, \ldots$ homogene, zu einerlei Ordnung gehörende Functionen sämmtlicher Variablen $x, y, z, \ldots .$ sind. Der gemeinschaftliche Ordnungsexponent dieser Functionen ist zugleich der Ordnungsexponent der Differenzialformel.

Ist $u = f(x, y, z, \ldots)$ homogen und von der Ordnung n, ferner $\quad du = P dx + Q dy + R dz + \ldots .,$

so sind $P, Q, R, \ldots .$ homogene Functionen von der Ordnung $n - 1$, und es besteht die Gleichung

$$nu = Px + Qy + Rz + \ldots . = \frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z + \ldots .$$

Denn setzen wir $f(\xi, \upsilon, \zeta, \ldots) = U$, so geben die Substitutionen $x = t\xi$, $y = t\upsilon$, $z = t\zeta, \ldots .$,

$$u = t^n U,$$

woraus $\frac{du}{d\xi} = t^n \frac{dU}{d\xi}$, $\frac{du}{d\upsilon} = t^n \frac{dU}{d\upsilon}$, $\frac{du}{d\zeta} = t^n \frac{dU}{d\zeta}$, rc.

und $\frac{du}{dt} = n t^{n-1} U = \frac{nu}{t}$ folgt.

Aber wir haben andererseits

$$\frac{du}{d\xi} = P\frac{dx}{d\xi} = Pt, \quad \frac{du}{d\upsilon} = Q\frac{dy}{d\upsilon} = Qt, \quad \frac{du}{d\zeta} = R\frac{dz}{d\zeta} = Rt$$

und

$$\frac{du}{dt} = P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt} + \ldots = P\xi + Q\upsilon + R\zeta + \ldots,$$

daher finden die Gleichungen

$$P = t^{n-1}\frac{dU}{d\xi}, \quad Q = t^{n-1}\frac{dU}{d\upsilon}, \quad R = t^{n-1}\frac{dU}{d\zeta}, \text{ rc.}$$

und $nu = Pt\xi + Qtv + Rt\zeta + \ldots = Px + Qy + Rz + \ldots$ Statt, welche die obigen Behauptungen rechtfertigen.

Es sey nun $P\,dx + Q\,dy + R\,dz +$ ꝛc. eine integrable Differenzialformel, eine solche nämlich, in Bezug auf welche

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},\quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx},\quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy},\ \text{ꝛc.}$$

ist; ferner P eine homogene Function der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ꝛc. von der Ordnung p, so ist

$$pP = \frac{dP}{dx}x + \frac{dP}{dy}y + \frac{dP}{dz}z + \ldots,$$

also $$(p+1)P = P + \frac{dP}{dx}x + \frac{dP}{dy}y + \frac{dP}{dz}z + \ldots.$$

Aber offenbar ist $$P + \frac{dP}{dx}x = \frac{d(Px)}{dx}$$

$$\frac{dP}{dy}y = \frac{dQ}{dx}y = \frac{d(Qy)}{dx}$$

$$\frac{dP}{dz}z = \frac{dR}{dx}z = \frac{d(Rz)}{dx}$$

u. s. w.,

folglich $$(p+1)P = \frac{d(Px + Qy + Rz + \ldots)}{dx}.$$

Auf dieselbe Art findet man, wenn Q, R, ꝛc. homogene Functionen der oben genannten Variablen von den Ordnungen q, r, ꝛc. sind:

$$(q+1)Q = \frac{d(Px + Qy + Rz + \ldots)}{dy}$$

$$(r+1)R = \frac{d(Px + Qy + Rz + \ldots)}{dz}$$

u. s. w.

Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$(p+1)P\,dx + (q+1)Q\,dy + (r+1)R\,dz + \ldots = \\ = d(Px + Qy + Rz + \ldots).$$

Es ist also auch die Differenzialformel

$$(p+1)P\,dx + (q+1)Q\,dy + (r+1)R\,dz + \ldots]$$

integrabel, und hat den Ausdruck

$$Px + Qy + Rz + \ldots + Const.$$

zum Integral. Nun gelten aber, den Bedingungen der Integrabilität gemäß, die Gleichungen

$$(p+1)\frac{dP}{dy} = (q+1)\frac{dQ}{dx},\quad (p+1)\frac{dP}{dz} = (r+1)\frac{dR}{dx},\ \text{ꝛc.},$$

folglich haben wir nothwendig

$$p = q = r = \text{etc.},$$

und somit ist

$$(p+1)(Pdx + Qdy + Rdz + \ldots) = d(Px + Qy + Rz + \ldots),$$

also

$$(104) \quad \int(Pdx + Qdy + Rdz + \ldots) = \frac{Px + Qy + Rz + \ldots}{p+1} + Const.$$

Diese Betrachtung zeigt, daß eine Differenzialformel

$$Pdx + Qdy + Rdz + \ldots\ldots,$$

in welcher P, Q, R, ... homogene Functionen der veränderlichen Größen x, y, z, ... sind, nur dann die Eigenschaft der Integrabilität zu besitzen vermag, wenn allen diesen Functionen der nämliche Ordnungsexponent zukommt, und daß der variable Theil des Integrals dieser Differenzialformel, der, falls sie ein solches zuläßt, im Allgemeinen eine homogene Function von einer um die Einheit höhere Ordnung ist, erhalten wird, wenn man die Summe

$$Px + Qy + Rz + \ldots\ldots$$

durch den um die Einheit vermehrten Ordnungsexponenten der Differenzialformel dividirt.

Nur in dem einzigen Falle, wenn der Ordnungsexponent einer homogenen Differenzialformel $= -1$ ist, kann ihr Integral nach der so eben aufgestellten Regel nicht gefunden werden; diese Regel gibt nämlich für dasselbe den Ausdruck

$$\frac{Px + Qy + Rz + \ldots}{0} + Const.,$$

dessen Form auf die Nichtanwendbarkeit der Regel selbst hindeutet. Verfolgt man die obige Deduction unter der Voraussetzung $p = -1$, so kommt man für alle Werthe von x, y, z, ... auf die Gleichung

$$d(Px + Qy + Rz + \ldots) = 0,$$

woraus zu ersehen ist, daß die Summe $Px + Qy + Rz + \ldots$ sich hier durch gegenseitiges Aufheben ihrer Glieder auf eine beständige Größe reducirt.

Sucht man das Integral der vorgelegten Differenzialformel nach der in dem Vorhergehenden erklärten, auf alle Differenzialformeln passenden Methode, so erscheint dasselbe in diesem Falle gewöhnlich unter einer transcendenten Gestalt.

Vier und fünfzigste Vorlesung.

Über die Integration der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

Wenn zwischen mehreren veränderlichen Größen u, x, y, z, 2c. eine Gleichung $F(u, x, y, z, \ldots) = o$ gegeben ist, wodurch eine derselben, z. B. u, für eine Function der übrigen x, y, z, ... erklärt wird, welche letzteren, in so fern sie durch keine neue Gleichung mit einander verknüpft erscheinen, als völlig willkürliche Größen zu betrachten sind: so muß, wenn x, y, z, ... sich um beliebige Differenzen ändern, d. h. in $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, ... übergehen, u gleichfalls sich um eine bestimmte, von Δx, Δy, Δz, ... abhängende Differenz ändern, deren Betrag mittelst der Gleichung

$$F(u + \Delta u, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) = o$$

erkannt wird. Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man linker Hand des Gleichheitszeichens die Differenz der Function $F(u, x, y, z, \ldots)$ so, als ob u von x, y, z, ... independent wäre; mithin folgt aus

(1) $\qquad F(u, x, y, z, \ldots) = o$. sogleich

(2) $\qquad \Delta . F(u, x, y, z, \ldots) = o.$

Es kann aber noch die Gleichung (2) mit (1) auf mannigfaltige Arten combinirt werden, z. B. indem man mittelst derselben irgend eine beiden gemeinschaftliche Größe eliminirt; hiedurch entsteht eine neue Gleichung, welche wir durch

(3) $\qquad f(u, x, y, z, \ldots \Delta u, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots) = o$

vorstellen wollen. Eine solche Gleichung, welche die zwischen der Differenz einer Function u und den Differenzen der ihr zum Grunde liegenden veränderlichen Größen x, y, z, ... bestehende Beziehung ausdrückt, heißt eine Differenzengleichung für u; nimmt man aber die Differenzialien statt der Differenzen, so hat man eine Differenzialgleichung für u. Beide Gleichungen sind von der ersten Ordnung, weil sie bloß die ersten Differenzen oder Differenzialien der Variablen enthalten. Nimmt man aber neuerdings die Differenz von (2), und verbindet man die sich dadurch ergebende Gleichung mit

(1) und (2), so kömmt man auf eine Differenzen- oder Differenzialgleichung von der **zweiten Ordnung**, von welcher man zu Gleichungen zwischen den Differenzen oder Differenzialien noch höherer Ordnungen aufsteigen kann. Es gibt auch Gleichungen, welche Differenzen und Differenzialien zugleich enthalten; man nennt sie Gleichungen **mit gemischten Differenzen**.

Eine vorgelegte Differenzen- oder Differenzialgleichung **integriren**, heißt aus derselben eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen selbst (die sogenannte **Integralgleichung**) finden, welche differenzirt und auf die oben beschriebene Weise behandelt, zur gegebenen Gleichung führt. Da, wie die Folge zeigen wird, die Integralgleichung in ihrer allgemeinsten Form unbestimmte Functionen oder doch unbestimmte Constanten enthält, welche in der Differenzen- oder Differenzialgleichung nicht erscheinen, so ergibt sich bei der Rechnungsprobe die zur Integration vorgelegte Gleichung erst, wenn man zwischen der Integralgleichung und ihrer Differenz oder ihrem Differenzial die erwähnte Function oder Constante eliminirt.

Die Grenzen, in welche wir unseren Vortrag einzuschränken genöthiget sind, gestatten uns nur die Differenzialgleichungen zu beachten. Wir wollen uns vor Allem mit jenen beschäftigen, in welchen bloß zwei veränderliche Größen x und y vorkommen.

Durch die Integration einer Differenzialformel mit einer Variablen, z. B. $\varphi(x)\,dx$, wird im Grunde die Integration einer Differenzialgleichung zweier veränderlicher Größen von der einfachsten Form bewerkstelliget. Denn setzt man $\varphi(x)\,dx = dy$, so hat man die Differenzialgleichung $dy - \varphi(x)\,dx = 0$. Ihre Integralgleichung ist, wenn man $\int \varphi(x)\,dx = F(x) + Const.$ seyn läßt:

$$y - F(x) = Const.$$

Wenn schon die Integration der Differenzialformeln mit einer Variablen oft bedeutenden Schwierigkeiten unterworfen ist, so wird man natürlicher Weise bei der Integration der Differenzialgleichungen überhaupt noch größere Hindernisse erwarten. Übrigens sieht man die Integration einer Differenzialgleichung von der ersten Ordnung schon als vollendet an, wenn es nur gelungen ist, ihre Integralgleichung so darzustellen, daß darin bloß noch auszumittelnde Integralien von integrablen Differenzialformeln erscheinen, welche sich, wie aus der vorhergehenden Vorlesung bekannt ist, jederzeit auf die Integration von Differenzialformeln mit einer Variablen reduciren lassen.

Jede Differenzialgleichung von der ersten Ordnung mit zwei veränderlichen Größen x und y, in welcher bloß die ersten Potenzen der Differenzialien dx und dy vorkommen, hat die Form

$$(4) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0,$$

wobei P und Q Functionen von x und y anzeigen. Ehe man sich auf weitere Schritte einläßt, wird man vor Allem untersuchen, ob der erste Theil derselben, nämlich $P\,dx + Q\,dy$, nicht etwa eine integrable Differenzialformel ist, was bekanntlich von dem Stattfinden der Bedingung $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ abhängt.

Entsprechen die Functionen P, Q derselben, so bestimme man das Integral von $P\,dx + Q\,dy$ nach den Methoden der vorhergehenden Vorlesung; wird es der Kürze wegen durch $F(x, y)$ vorgestellt, so ist die vorgelegte Differenzialformel mit $d\,.\,F(x, y) = 0$ einerlei, und hieraus folgt unmittelbar die Integralgleichung

$$F(x, y) = Const.$$

Zur Bestimmung der Constante muß man den Werth von y für einen speciellen Werth von x kennen.

Dieselbe Bemerkung ist auch auf eine Differenzialgleichung

$$(5) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

mit dreien, oder mit noch mehreren veränderlichen Größen anwendbar.

Allein in den wenigsten Fällen wird sich in einer gegebenen Differenzialgleichung von der Form (4) linker Hand des Gleichheitszeichens eine integrable Differenzialformel befinden, da das Resultat der Differenziation einer Gleichung $F(x, y) = 0$, durch Wegschaffung eines allen Gliedern gemeinschaftlichen veränderlichen Factors, oder durch Verbindung dieses Resultates mit der ursprünglichen Gleichung, aufhört der oben erwähnten Bedingung der unmittelbaren Integrabilität Genüge zu leisten. Man muß sodann auf einem der im Folgenden angedeuteten Wege zum Ziele zu kommen suchen.

1) Man trachte entweder durch bloße Umstaltungen, oder durch Einführung neuer veränderlicher Größen ξ und v statt x und y, indem man sowohl x als auch y beliebigen Functionen von ξ, v gleich setzt, der Differenzialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ die Gestalt

$$\varphi(\xi)\,d\xi + \psi(v)\,dv = 0$$

zu ertheilen, so, daß das Differenzial jeder der beiden Variablen bloß mit einer Function eben dieser Größe, mit Ausschluß der Andern mul-

tiplicirt erscheint. Ist dieß geschehen, so ergibt sich sogleich die Integralgleichung, wenn man in

$$\int \varphi(\xi)\, d\xi + \int \psi(v) \,.\, dv = Const.$$

nach verrichteter Integration der Differenzialformeln $\varphi(\xi)\,d\xi$ und $\psi(v)\,dv$ die Größen ξ und v wieder durch x und y ausdrückt. Dieses Verfahren heißt das Integriren der Differenzialgleichungen durch Absonderung der veränderlichen Größen.

2) Man suche eine solche Function von x und y, sie heiße L, ausfindig zu machen, daß die Differenzialgleichung $P\,dx + Q\,dy = o$, durch Multiplication mit derselben, linker Hand des Gleichheitszeichens eine integrable Differenzialformel $LP\,dx + LQ\,dy$ darbietet. Gelingt dieß, so hat man, weil die Gleichung

$$LP\,dx + LQ\,dy = o$$

offenbar dieselbe Relation zwischen x und y ausdrückt, welche durch die gegebene Differenzialgleichung dargestellt wird, wenn man

$$LP\,dx + LQ\,dy = dF(x,\, y)$$

setzt, die Integralgleichung

$$F(x,\, y) = Const.$$

Dieses Verfahren heißt das Integriren der Differenzialgleichungen durch Multiplicatoren; die dabei zu Hülfe genommene Function L wird der integrirende Factor genannt.

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, daß man, sobald eine Differenzialgleichung durch Absonderung der Variablen integrirt werden kann, auch im Stande ist, für dieselbe einen integrirenden Factor anzugeben. Denn aus $P\,dx + Q\,dy = o$ folgt nur in so ferne $\varphi(\xi)\,d\xi + \psi(v)\,dv = o$, als der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ durch die Einführung der neuen Variablen ξ, v in $\lambda[\varphi(\xi)\,d\xi + \psi(v)\,dv]$ übergeht, wobei λ eine Function von ξ und v anzeigt. Da nun $\varphi(\xi)\,d\xi + \psi(v)\,dv$ unmittelbar durch Differenziation einer Function von ξ nnd v erhalten wird, so muß $\frac{P\,dx + Q\,dy}{\lambda}$, nachdem man λ durch x und y ausgedrückt hat, ebenfalls das Differenzial einer Function von x und y seyn. Es ist also $\frac{1}{\lambda}$ der integrirende Factor für die Differenzialgleichung $P\,dx + Q\,dy = o$.

Hieraus folgt, daß die zweite der so eben erklärten Integrationsmethoden der Differenzialgleichungen sich auf alle Fälle erstreckt, welche

nach der ersten Methode behandelt werden können; da nun das Umgekehrte nicht Statt findet, so sieht man, daß die zweite Methode mehr beachtet zu werden verdient als die erstere. Wir haben der Absonderung der Variablen auch nur deßhalb erwähnt, weil sie als Mittel dienen kann, die integrirenden Factoren der Differenzialgleichungen zu entdecken, für deren Auffindung man noch kein allgemeines Verfahren besitzt.

Eine Differenzialgleichung gestattet unendlich viele integrirende Factoren; denn verwandelt sich $P dx + Q dy$ durch Multiplication mit L in $d . F(x, y)$, so geht der genannte Ausdruck durch Multiplication mit $L . f[F(x, y)]$, wobei f eine beliebige Function der Function F anzeigt, in $f[F(x, y)]\, d . F(x, y)$ über, d. h. er wird ebenfalls in das Differenzial einer Function von x und y umgestaltet.

Da jede Function L von x und y, welche der Gleichung

$$(5) \qquad \frac{d(LP)}{dy} = \frac{d(LQ)}{dx}$$

Genüge leistet, zu einem integrirenden Factor der Differenzialgleichung (4) verwendet werden kann, und zugleich durch (5) das ausschließende Merkmal eines solchen Factors ausgesprochen wird; so hängt die Ausmittelung desselben von der Auflösung der Gleichung (5) oder der ihr gleichgeltenden

$$(6) \qquad L\left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] + P\frac{dL}{dy} - Q\frac{dL}{dx} = 0$$

ab. Allein die Behandlung dieser Gleichung ist nicht geringeren Schwierigkeiten unterworfen, als die Integration der vorgelegten Differenzialgleichung selbst.

Jedoch läßt sich der integrirende Factor L, in den wenigen Fällen, in welchen er bloß von x oder bloß von y abhängt, durch das Integral einer Differenzialformel der betreffenden veränderlichen Größe darstellen. Es sey z. B. L bloß eine Function von x, also $\frac{dL}{dy} = 0$ und $\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = W$, so gibt uns die Gleichung (6)

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dx} = \frac{W}{Q},$$

$$\text{also } lL = \int \frac{W\,dx}{Q} \text{ und } L = e^{\int \frac{W\,dx}{Q}}.$$

Damit diese Formel anwendbar ist, muß, wie man sieht, $\frac{W}{Q}$

eine Function von x allein seyn. Auf dieselbe Art findet man, wenn $\frac{W}{P}$ bloß von y abhängt:

$$L = e^{-\int \frac{W dy}{P}}.$$

Vergleicht man die allgemeine Form der sogenannten linearen Differenzialgleichungen, nämlich

(7) $dy + Uy dx = X dx$ oder $(Uy - X) dx + dy = 0$,

worin U und X Functionen von x allein bedeuten, mit (4), so hat man $P = Uy - X$, $Q = 1$, also

$$\frac{dP}{dy} = U, \quad \frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{W}{Q} = U,$$

d. h. $\frac{W}{Q}$ gleich einer Function von x allein; daher findet hier der integrirende Factor $L = e^{\int U dx}$ Statt. Integrirt man nun die Differenzialformel

$$(Uy - X) e^{\int U dx} dx + e^{\int U dx} dy$$

nach der Formel (100) der vorhergehenden Vorlesung, so erhält man den Ausdruck

$$y e^{\int U dx} - \int X e^{\int U dx} dx$$

zum Integral; daher ist

$$y e^{\int U dx} - \int X e^{\int U dx} dx = Const. \quad \text{oder}$$

(8) $$y = e^{-\int U dx} [Const. + \int X e^{\int U dx} dx]$$

die Integralgleichung der gegebenen Differenzialgleichung (7).

Die Differenzialgleichung

(9) $$dy + Uy dx = X y^n dx$$

läßt sich, wenn man $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ setzt, auf die Form (7) reduciren, und somit nach (8) integriren.

Um die Integration der Gleichung (7) durch Absonderung der veränderlichen Größen zu vollziehen, sey $y = \xi v$, so wird

$$dy = v d\xi + \xi dv,$$

folglich verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$v d\xi + \xi dv + U \xi v dx = X dx.$$

Da hier eine der Größen ξ, v völlig willkürlich ist, so sey

$$v d\xi + U \xi v dx = 0.$$

Diese Gleichung gibt $\frac{d\xi}{\xi} = -\mathrm{U}dx$, also $\xi = e^{-\int \mathrm{U}dx}$.

Da nun auch $\xi dv = \mathrm{X}dx$ seyn muß, so hat man
$dv = \mathrm{X}e^{\int \mathrm{U}dx}dx$, daher $v = Const. + \int \mathrm{X}e^{\int \mathrm{U}dx}dx$
und $y = e^{-\int \mathrm{U}dx}[Const. + \int \mathrm{X}e^{\int \mathrm{U}dx}dx]$ wie oben.

Derselbe Kunstgriff führt auch zur Integration der Differenzengleichung

$$(10) \qquad \Delta y + \mathrm{U}y = \mathrm{X},$$

wobei U und X wieder Functionen von x bedeuten. Denn die Annahme $y = \xi v$ gibt $\Delta y = v\Delta\xi + \xi\Delta v + \Delta v\Delta\xi$, also

$$v\Delta\xi + \xi\Delta v + \Delta v\Delta\xi + \mathrm{U}\xi v = \mathrm{X}.$$

Läßt man nun $v\Delta\xi + \mathrm{U}\xi v = 0$ seyn, so hat man

$$\Delta\xi + \mathrm{U}\xi = 0 \quad \text{und} \quad (\xi + \Delta\xi)\Delta v = \mathrm{X}.$$

Um die erstere Gleichung zu integriren, geben wir ihr die Form

$$\xi + \Delta\xi = (1-\mathrm{U})\xi,$$

so wird $l(\xi+\Delta\xi) - l\xi = l(1-\mathrm{U})$

oder $\Delta l\xi = l(1-\mathrm{U})$,

folglich $l\xi = \Sigma l(1-\mathrm{U})$ und $\xi = e^{\Sigma l(1-\mathrm{U})}$.

Aus der anderen Gleichung erhält man

$$\Delta v = \frac{\mathrm{X}}{\xi+\Delta\xi} = \frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{U}}\, e^{-\Sigma l(1-\mathrm{U})},$$

also $v = \Sigma \frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{U}}\, e^{-\Sigma l(1-\mathrm{U})}$.

Demnach ist

$$(11) \qquad y = e^{\Sigma l(1-\mathrm{U})}\, \Sigma \frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{U}}\, e^{-\Sigma l(1-\mathrm{U})}$$

die verlangte Integralgleichung für die Differenzengleichung (10) *).

Sind in der Differenzialgleichung $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = 0$, P und Q homogene Functionen von x und y desselben Grades, so läßt sich immer eine so beschaffene homogene Function L derselben Variablen ausfindig machen, daß die Differenzialformel $\mathrm{LP}dx + \mathrm{LQ}dy$ integrabel wird. Es wird nämlich hiezu bloß das Stattfinden der Gleichung

$$\mathrm{LP}x + \mathrm{LQ}y = Const.$$

erfordert, woraus $\mathrm{L} = \frac{Const.}{\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y}$ folgt. Am einfachsten ist es, die

*) Sie läßt sich, wenn man $\Sigma l(1-\mathrm{U})$ mittelst der Gleichung (44) der ein und vierzigsten Vorlesung in den Logarithmus eines Productes P umstaltet, einfacher darstellen, weil dann $e^{\Sigma l(1-\mathrm{U})}$ in $e^{l\mathrm{P}} = \mathrm{P}$ übergeht.

Constante = 1 zu setzen. Zur Integration der oben genannten Differenzialformel muß jedoch die in der vorhergehenden Vorlesung gelehrte allgemeine Methode angewendet werden, weil jetzt LP, LQ homogene Functionen von der Ordnung — 1 sind.

Die Absonderung der Variablen erfolgt hier, wenn man $y = ux$ setzt. Hiedurch gehen P und Q in Ausdrücke von den Formen Ux^r, Vx^r über, wobei U, V Functionen von u allein sind, und r den Grad von P und Q anzeigt. Man erhält die Gleichung

$$(U + Vu)\,dx + Vx\,du = 0,$$

$$\text{also}\quad \frac{dx}{x} + \frac{V\,du}{U + Vu} = 0,$$

$$\text{daher}\quad lx + \int \frac{V\,du}{U + Vu} = Const.$$

Nach verrichteter Integration der Differenzialformel $\frac{V\,du}{U + Vu}$ kommt $\frac{y}{x}$ an die Stelle von u.

Soll eine Differenzialgleichung mit drei veränderlichen Größen, wie (5) ist, mittelst eines Factors L integrirt werden können, so muß es möglich seyn, die Gleichung (6) für jedes Paar dieser Variablen zu realisiren, d. h. es müssen die Gleichungen

$$(12)\quad \begin{aligned} L\left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] + P\frac{dL}{dy} - Q\frac{dL}{dx} &= 0 \\ L\left[\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right] + P\frac{dL}{dz} - R\frac{dL}{dx} &= 0 \\ L\left[\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right] + Q\frac{dL}{dz} - R\frac{dL}{dy} &= 0 \end{aligned}$$

zugleich bestehen können. Da diese Gleichungen, wenn man sie, nachdem die erste derselben mit R, die zweite mit — Q, und die dritte mit P multiplicirt worden ist, durch Addition vereinigt, die von L freie Gleichung

$$(13)\quad R\left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] + Q\left[\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right] + P\left[\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right] = 0$$

darbieten, so ist die Existenz eines solchen Factors, und folglich auch die Möglichkeit, das Integral der Differenzialgleichung (6) durch eine Gleichung darzustellen, an die Erfüllung der Bedingung (13) gebunden. Hieraus folgt aber keinesweges, daß die Gleichung (5) im Falle des Gegentheiles gar kein Integral zuläßt, wie wir in der Folge sehen werden.

Fünf und fünfzigste Vorlesung.

Über die Integration der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, worin höhere Potenzen der Differenzialien erscheinen, und der Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

I. Enthält eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei veränderlichen Größen x und y höhere Potenzen von dx und dy, so läßt sie sich nach Wegschaffung der sich allenfalls über diese Differenzialien erstreckenden Wurzelzeichen auf die Form

$$(1)\quad dy^m + P_1 dy^{m-1} dx + P_2 dy^{m-2} dx^2 + \ldots \ldots + P_{m-1} dy\, dx^{m-1} + P_m dx^m = 0$$

bringen, wobei $P_1, P_2, P_3, \ldots P_m$ Functionen von x und y anzeigen. Da dieselbe, wenn man sie durch dx^m theilt, in Bezug auf den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vom m^{ten} Grade ist, so muß ihr durch m Werthe $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_m$ dieses Quotienten, welche sämmtlich Functionen von x und y seyn können, Genüge geleistet werden, und somit läßt sie sich in m Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, welche die Differenzialien von x und y bloß in der ersten Potenz enthalten, nämlich in

$$(2)\quad dy - Q_1 dx = 0,\; dy - Q_2 dx = 0,\; dy - Q_3 dx = 0, \text{ etc. } \ldots dy - Q_m dx = 0$$

zerfällen. Hat man die Integralien dieser Differenzialgleichungen gefunden, sie seyen

$$(3)\quad F_1(x, y, C_1) = 0,\; F_2(x, y, C_2) = 0,\; F_3(x, y, C_3) = 0, \text{ etc. } \ldots F_m(x, y, C_m) = 0,$$

wobei $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ willkürliche Constanten vorstellen, so ist jede einzelne der Gleichungen (3) für sich, wie auch das Product einer beliebigen Anzahl derselben als ein Integral der Differenzialgleichung (1) zu betrachten. Um dem Integral die allgemeinste Bedeutung zu geben, wird man das Product sämmtlicher m Gleichungen (3) nehmen.

Der Ableitung der Gleichungen (2) aus (1) stellen sich alle Schwie-

rigkeiten entgegen, mit welchen die Auflösung der algebraischen Gleichungen verknüpft ist. Man kann denselben manchmal ausweichen, wenn man der Rechnung eine andere Wendung gibt.

Kommt z. B. in den Coefficienten $P_1, P_2, P_3, \ldots P_m$ der Gleichung (1) bloß eine der Variablen, sagen wir x, allein vor, und ist man im Stande die genannte Gleichung in Bezug auf diese Variable aufzulösen, so findet man, wenn man der Kürze wegen $\frac{dy}{dx} = p$ setzt, $x = \varphi(p)$. Aber es ist wegen $dy = p\,dx$

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp,$$

folglich $y = px - \int \varphi(p) \,.\, dp$.

Läßt sich nun die Differenzialformel $\varphi(p)\,dp$ integriren, so braucht man nur mittelst der zwei Gleichungen $x = \varphi(p)$ und $y = px - \int\varphi(p)\,dp$ die Größe p zu eliminiren, um ein Integral der Differenzialgleichung (1) zu erhalten. Ist $\varphi(p)$ vieldeutig, so muß die Rechnung mit jedem Werthe dieser Function insbesondere vorgenommen werden.

Enthält die Gleichung (1) beide Variable, jedoch eine derselben, z. B. y bloß in der ersten Potenz, so findet man, wie man leicht sieht, $dy = T\,dx + U\,dp$, wobei T und U Functionen von x und p sind, folglich wegen $dy = p\,dx$

$$(T - p)\,dx + U\,dp = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung verhilft, wenn sie ausführbar ist, zu einer Gleichung zwischen x, p und einer willkürlichen Constante; eliminirt man aus derselben mit Hülfe der Gleichung (1) die Größe $p = \frac{dy}{dx}$, so hat man die Integralgleichung der Differenzialgleichung (1).

Wir bemerken noch, daß wenn die zu integrirende Differenzialgleichung in Bezug auf x und y homogen ist, die Substitution $y = ux$ gute Dienste leistet. Denn dadurch geht x aus der Differenzialgleichung weg, und es bleibt eine Gleichung zwischen u und $\frac{dy}{dx} = p$, mittelst welcher man eine dieser Größen durch die andere ausdrücken kann. Nun ist offenbar $p\,dx = u\,dx + x\,du$, folglich $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}$ und

$$lx = \int \frac{du}{p - u} = -\,l(p - u) + \int \frac{dp}{p - u}.$$

Man erhält also, je nachdem man p durch u, oder u durch p darzustellen vermag, mittelst des ersten Ausdruckes lx, folglich auch x

als eine Function von u, und mittelst des zweiten Ausdruckes als eine Function von p. Wegen $y = ux$ ist aber auch y durch dieselbe Größe u oder p gegeben, daher findet man durch Elimination derselben die Integralgleichung zwischen x und y.

Sehr leicht läßt sich die Integration der Gleichung (1) bewerkstelligen, wenn $P_1, P_2, P_3, \ldots P_m$ constante Größen sind. Denn dann ist auch $\frac{dy}{dx} = p$ eine beständige Größe, folglich $y = px + C$, wobei C eine willkürliche Constante bedeutet, und $p = \frac{y - C}{x}$. Substituirt man diesen Ausdruck in (1) statt $\frac{dy}{dx}$, so hat man die verlangte Integralgleichung.

Was die Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit mehr als zwei veränderlichen Größen und höheren Potenzen der Differenzialien betrifft, so begnügen wir uns hier damit zu bemerken, daß eine solche Gleichung nicht auf eine einzige Integralgleichung führt, wofern sich nicht die erste Potenz eines Differenzials durch die übrigen in einem hinsichtlich dieser Differenzialien rationalen Ausdrucke darstellen läßt, welcher außerdem noch an die am Schlusse der vorhergehenden Vorlesung erwähnte Bedingung der Integrabilität durch einen Multiplicator gebunden ist.

II. Eine Differenzialgleichung höherer Ordnung wird als integrirt betrachtet, wenn man im Stande ist, die Integration derselben bloß von Operationen abhängig zu machen, welche die Integration der Differenzialgleichungen niedrigerer Ordnungen betreffen. Die Grenzen unseres Vortrages gestatten uns nur Differenzialgleichungen dieser Art zwischen zwei veränderlichen Größen, und von diesen nur einfachere Fälle zu betrachten.

Die allgemeine Form einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwischen y und x, welche d^2y und d^2x bloß in der ersten Potenz enthält, ist

$$(4) \qquad M d^2y + N d^2x + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) . dx^2 = 0,$$

worin M und N Functionen von x und y vorstellen.

Soll durch diese Gleichung y als eine bestimmte Function von x erscheinen, so muß auf eine der in der vier und vierzigsten Vorlesung angedeuteten Arten $\frac{d^2x}{dx^2}$ entweder unmittelbar oder mittelbar (in so

fern y oder gar $\frac{dy}{dx}$ in das Spiel kömmt) als eine Function von x, welche wir P nennen wollen, gegeben seyn. Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = p$ oder $dy = p\,dx$, so wird

$d^2y = dp\,dx + p\,d^2x$, welcher Ausdruck wegen $d^2x = P\,dx^2$ in $d^2y = (dp + pP\,dx)\,dx$ übergeht. Hiedurch nimmt die vorgelegte Gleichung (4), wenn man der Kürze wegen

$$(Mp + N)P + f(x, y, p) = Q$$

setzt, die Gestalt

$$(5) \qquad M\,dp + Q\,dx = 0$$

an, welche sich durch Multiplication mit p auch in

$$(6) \qquad Mp\,dp + Q\,dy = 0$$

transformiren läßt.

Je nachdem nun in M und Q die Größe y oder die Größe x fehlt, ergibt sich durch Integration der Gleichung (5) oder (6) eine mit einer willkürlichen Constante versehene Gleichung zwischen p und x, oder zwischen p und y. Stellt man statt p wieder den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zurück, so geht die gefundene Gleichung, welche man das erste Integral der vorgelegten Differenzialgleichung nennt, in eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen x und y über, deren Integration das zweite oder letzte Integral der gegebenen Differenzialgleichung darbietet. Durch diese Integration kommt abermals eine unbestimmte Constante in die Rechnung, woraus erhellet, daß das Integral einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung in seiner allgemeinsten Gestalt mit zwei willkürlichen Constanten versehen ist. Diese werden bestimmt, wenn man sowohl den Werth von y als auch den Werth von $\frac{dy}{dx} = p$ für einen besonderen Werth von x kennt. Um aus der allgemeinsten Integralgleichung wieder die zugehörige Differenzialgleichung der zweiten Ordnung abzuleiten, muß man die erstere Gleichung zwei Mal nach einander differenziren, und aus ihr und den beiden Differenzialien die zwei Constanten durch Elimination wegschaffen. Eliminirt man aus der Integralgleichung und aus ihrem ersten Differenzial bloß eine Constante, so erhält man das erste Integral der Differenzialgleichung, und da diese letztere Gleichung zwei wesentlich von einander verschiedene Formen annimmt, je nachdem man die eine

oder die andere der Constanten wegschafft, so sieht man, daß jeder Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwei verschiedene erste Integralgleichungen zugehören. Die Elimination des Differenzialquotienten aus denselben führt offenbar auf das zweite Integral.

Läßt sich mittelst des gefundenen Integrals der Gleichung (5) p durch x ausdrücken, so daß $p = \varphi(x)$ wird, so hat man $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$, folglich sogleich $y = \int \varphi(x)\, dx$. Ist man aber leichter im Stande x durch p darzustellen, so daß $x = \psi(p)$ wird, so hat man $y = \int p\, d\psi(p)$, und durch Elimination von p aus diesen zwei Gleichungen die Integralgleichung zwischen y und x. Dasselbe läßt sich in Bezug auf die Gleichung (6) sagen. Gibt ihr Integral $p = \varphi(y)$, so hat man $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$; findet man aber aus demselben $y = \psi(p)$, so hat man $x = \int \frac{d\psi(p)}{p}$, und durch Elimination von p die Integralgleichung zwischen y und x.

Erscheinen in (5) oder (6) die Größen x und y zugleich, so kann man diese Gleichungen offenbar nicht integriren, denn es sind da mehr veränderliche Größen als Differenzialien vorhanden. Es läßt sich also die Integration der gegebenen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung auf diesem Wege nur in so fern zu Stande bringen, als man die Gleichungen (5) oder (6) durch eine geschickte Einführung neuer Variablen so zu transformiren vermag, daß sich darin bloß zwei veränderliche Größen sammt ihren Differenzialien befinden. Allgemeine Regeln lassen sich über diesen Gegenstand nicht aufstellen; die anzuwendenden Kunstgriffe werden durch die Beschaffenheit jedes individuellen Falles bestimmt. Oft kann die gegebene Differenzialgleichung selbst zur Anwendung dieser Kunstgriffe durch eine vorläufige Umstaltung vorbereitet werden.

Eine Gleichung von einiger Allgemeinheit ist folgende:

$$(7) \qquad d^2y + U\,dx\,dy + Vy\,dx^2 = X\,dx^2,$$

in welcher U, V, X beliebige Functionen von x anzeigen, und $d^2x = 0$ ist. Setzt man $y = uz$, so wird

$$dy = z\,du + u\,dz, \quad d^2y = z\,d^2u + 2\,du\,dz + u\,d^2z,$$

folglich verwandelt sich die Gleichung (7) in

$$z(d^2u + U\,dx\,du + Vu\,dx^2) + u\,d^2z + 2\,du\,dz + Uu\,dx\,dz = X\,dx^2.$$

Von den zwei Größen u, z ist eine völlig willkürlich, man kann daher

(8) $$d^2u + Udxdu + Vudx^2 = 0$$

setzen, wodurch

(9) $$ud^2z + 2dudz + Udxdz = Xdx^2$$

wird. Um die Gleichung (8) auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zu reduciren, sey $u = e^t$, so hat man $du = e^t dt$ und $d^2u = e^t dt^2 + e^t d^2t$; dadurch geht diese Gleichung nach Wegschaffung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors e^t in

$$d^2t + dt^2 + Udxdt + Vdx^2 = 0$$

über, welche letztere Gleichung für $dt = pdx$ und $d^2x = 0$ die bloß p und x enthaltende Differenzialgleichnng der ersten Ordnung

(10) $$dp + (p^2 + Up + V)\, dx = 0$$

darbietet. Vermag man die Gleichung (10) zu integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen p und x; bestimmt man mittelst derselben p durch x, so wird auch $t = \int pdx$, und folglich auch $u = e^{\int pdx}$ durch x ausgedrückt. Führt man diesen Werth von u in die Gleichung (9) ein, und setzt man $dz = qdx$, so hat man es mit der Differenzialgleichung der ersten Ordnung

(11) $$dq + \left(\frac{2du}{udx} + U\right) qdx = \frac{X}{u} dx$$

zu thun, worin sich bloß die veränderlichen Größen u und x befinden, und welche unter der in der vorhergehenden Vorlesung betrachteten Form (7) enthalten ist, also nach der dort erklärten Methode integrirt werden kann. Da man hiedurch q, also auch z als eine Function von x findet, so ist man endlich im Stande y durch x auszudrücken, d. h. die Integralgleichung der Differenzialgleichung (7) zu bilden.

Wir haben hier durch die Substitution $y = uz$ die Integration der complicirteren Gleichung (7) von jener der einfacheren (8) abhängig gemacht. Dieser Kunstgriff ist selbst auf die für $d^2x = 0$ geltende Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung

(12) $$d^ny + P_1 d^{n-1}ydx + P_2 d^{n-2}ydx^2 + P_3 d^{n-3}ydx^3 + \ldots$$
$$\ldots + P_{m-1} dydx^{m-1} + P_m ydx^m = Xdx^m,$$

worin $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{m-1}, P_m$, X Functionen von x anzeigen, anwendbar, so wie auch die Gleichung

(13) $$d^ny + P_1 d^{n-1}ydx + P_2 d^{n-2}ydx^2 + P_3 d^{n-3}ydx^3 + \ldots$$
$$\ldots + P_{m-1} dydx^{m-1} + P_m ydx^m = 0$$

durch die Substitution $y = e^t$ auf eine Differenzialgleichung der $(n-1)^{ten}$

Ordnung reducirt wird. Wir wollen jedoch die hiezu dienlichen Rechnungen nicht ausführen, sondern noch eine von Lagrange erfundene Integrations-Methode kennen lernen, von welcher auch in anderen Fällen ein nützlicher Gebrauch gemacht werden kann. Sie besteht in der Ableitung des allgemeinen Integrals der Gleichung (12) aus n partikulären (d. i. für specielle Bestimmungen der Constanten, deren die zu einer Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung gehörende Integralgleichung nothwendig n enthält, genommenen) Integralien der Gleichung (13).

Es seyen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ Functionen von x, welche statt y in die Gleichung (13) substituirt derselben Genüge leisten; ferner seyen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ beständige Größen, so entspricht offenbar auch der Ausdruck

$$(14) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n$$

dieser Gleichung. Ist nun keine der Größen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ ein Product einer andern derselben mit einer beständigen Größe, so sind in (14) wirklich n unbestimmte Constanten vorhanden (denn wäre z. B. $y_2 = Ay$, so gäben die Glieder $C_1 y_1 + C_2 y_2$ den Ausdruck $(C_1 + AC_2) y_1$, d. h. bloß das Product einer Constante mit y_1), und deßwegen ist (14) die allgemeinste Integralgleichung für (13).

Statt der Größen $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ lassen sich nun solche Functionen von x finden, daß der Ausdruck (14) in das allgemeine Integral der Gleichung (12) übergeht. Behandelt man diese Größen als variable, so erhält man

$$dy = C_1 dy_1 + C_2 dy_2 + C_3 dy_3 + \ldots + C_n dy_n$$
$$+ y_1 dC_1 + y_2 dC_2 + y_3 dC_3 + \ldots + y_n dC_n .$$

Man lasse

$$(15) \qquad y_1 dC_1 + y_2 dC_2 + y_3 dC_3 + \ldots + y_n dC_n = 0$$

seyn, so wird

$$(16) \qquad dy = C_1 dy_1 + C_2 dy_2 + C_3 dy_3 + \ldots + C_n dy_n ;$$

gerade so, als ob $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ noch beständig wären.

Man nehme nun eben so die successiven Differenzialien von dy, und setze

$$(17)\quad \begin{aligned} &dy_1 dC_1 + dy_2 dC_2 + dy_3 dC_3 + \ldots + dy_n dC_n = 0 \\ &d^2y_1 dC_1 + d^2y_2 dC_2 + d^2y_3 dC_3 + \ldots + d^2y_n dC_n = 0 \\ &d^3y_1 dC_1 + d^3y_2 dC_2 + d^3y_3 dC_3 + \ldots + d^3y_n dC_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d^{n-2}y_1 dC_1 + d^{n-2}y_2 dC_2 + d^{n-2}y_3 dC_3 + \ldots + d^{n-2}y_n dC_n = 0, \end{aligned}$$

so hat man

$$(18)\quad \begin{aligned} d^2y &= C_1 d^2y_1 + C_2 d^2y_2 + C_3 d^2y_3 + \ldots + C_n d^2y_n\,. \\ d^3y &= C_1 d^3y_1 + C_2 d^3y_2 + C_3 d^3y_3 + \ldots + C_n d^3y_n \\ d^4y &= C_1 d^4y_1 + C_2 d^4y_2 + C_3 d^4y_3 + \ldots + C_n d^4y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^ny &= C_1 d^ny_1 + C_2 d^ny_2 + C_3 d^ny_3 + \ldots + C_n d^ny_n \\ &+ d^{n-1}y_1 dC_1 + d^{n-1}y_2 dC_2 + d^{n-1}y_3 dC_3 + \ldots + d^{n-1}y_n dC_n\,. \end{aligned}$$

Substituirt man die Ausdrücke (14), (16) und (18) in die Gleichung (12), und bedenkt man, daß die Größen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die Gleichung (13) erfüllen, so bleibt

$$(19)\quad d^{n-1}y_1 dC_1 + d^{n-1}y_2 dC_2 + d^{n-1}y_3 dC_3 + \ldots$$
$$\ldots + d^{n-1}y_n dC_n = X dx^n\,.$$

Wir haben nun n Gleichungen, nämlich (15), (17) und (19), mittelst welcher sich die Differenzialien $dC_1, dC_2, dC_3, \ldots dC_n$ durch x und dx ausdrücken lassen, wenn die Functionen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ bekannt, und ihre successiven Differenzialien berechnet sind. Es sey

$$dC_1 = X_1 dx,\ dC_2 = X_2 dx,\ dC_3 = X_3 dx, \ldots dC_n = X_n dx,$$

so ergibt sich

$$C_1 = \int X_1 dx,\ C_2 = \int X_2 dx,\ C_3 = \int X_3 dx, \ldots C_n = \int X_n dx,$$

folglich

$$(20)\quad y = y_1 \int X_1 dx + y_2 \int X_2 dx + y_3 \int X_3 dx + \ldots + y_n \int X_n dx$$

als die allgemeinste Integralgleichung für (12), weil die hier vorhandenen Integralien die n unbestimmten Constanten mit sich führen.

Sechs und fünfzigste Vorlesung.

Über die besonderen Auflösungen der Differenzialgleichungen.

Wenn man eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Größen x und y, welche wir, in so fern sie die Differenzialien dx und dy nicht nothwendiger Weise in der ersten Potenz enthält, durch

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

vorstellen wollen, auf was immer für einem Wege integrirt, so erscheint in der gefundenen Integralgleichung, vorausgesetzt, daß die Rechnung in der größtmöglichsten Allgemeinheit durchgeführt worden ist, eine unbestimmte in der gegebenen Differenzialgleichung (1) nicht vorkommende Constante. Nennen wir diese Constante a, so können wir die erwähnte Integralgleichung durch

$$(2) \qquad F(x, y, a) = 0$$

andeuten. Damit a einen bestimmten Werth erhalte, muß die Relation, welche y mit x verknüpft, näher bekannt seyn.

Aus der Gleichung (2) erhält man eben so viele besondere oder partikuläre Integralien für (1), als man der Constante a besondere Werthe anweisen mag. Allein das Umgekehrte hievon findet nicht immer Statt, d. h. nicht jede Gleichung, welche nach verrichteter Differenziation die durch (1) ausgedrückte Beziehung zwischen dx und dy darbietet, und deßhalb als ein Integral der Gleichung (1) betrachtet werden muß, ist ein durch Specialisirung der Constante a erzeugter besonderer Fall der allgemeinen Gleichung (2). Es läßt sich nämlich für eine gegebene Differenzialgleichung nebst der allgemeinen, mit der unbestimmten Constante versehenen, Integralgleichung nicht selten noch eine andere ausmitteln, welche weder eine in der Differenzialgleichung nicht vorhandene Constante mit sich führt, noch den Zusatz einer solchen verträgt, also auch nicht in der allgemeinen Integralgleichung enthalten ist.

So gibt z. B. die Differenzialgleichung

$$dy^2 - x\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0,$$

wenn man sie in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ auflöst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

oder $$\frac{x\,dx - 2\,dy}{\sqrt{x^2 - 4y}} + dx = 0;$$

woraus, weil $\frac{x\,dx - 2\,dy}{\sqrt{x^2 - 4y}}$ eine integrable Differenzialformel ist, sogleich das allgemeine Integral

$$\sqrt{x^2 - 4y} + x + a = 0$$

oder auch $$x + a = -\sqrt{x^2 - 4y},$$

d. h. $$4y + 2ax + a^2 = 0$$

folgt, wenn nämlich a die durch die Integration herbeigeführte Constante vorstellt. Schreibt man 2a statt a, so nimmt die Integralgleichung die einfachere Form

$$y + ax + a^2 = 0$$

an. Differenzirt man, um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, diese Gleichung, so hat man $dy + a\,dx = 0$, also $a = -\frac{dy}{dx}$; und wenn man mittelst dieses Ausdruckes a aus der Integralgleichung wegschafft, wieder die gegebene Differenzialgleichung.

Aber dieser Differenzialgleichung wird offenbar auch Genüge geleistet, wenn man

$$x^2 - 4y = 0$$

setzt, denn hiedurch geht sie in $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$ über, welche Folge mit der Voraussetzung $x^2 - 4y = 0$ identisch ist; es ist also auch $x^2 - 4y = 0$ ein Integral derselben. Da nun die Gleichung

$$y + ax + a^2 = 0$$

für keinen constanten Werth von a mit $x^2 - 4y = 0$ zusammenfällt, da durch keinen constanten Werth von a die in der ersteren Gleichung nicht vorhandene Größe x^2 in dieselbe eingeführt werden kann, so bestätiget der vorliegende Fall die Richtigkeit der obigen Aussage.

Man nennt eine unter dem allgemeinen Integral (2) nicht begriffene Relation zwischen x und y, welche der Differenzialgleichung (1) Genüge leistet, eine besondere Auflösung derselben.

Man erhält eine besondere Auflösung einer Differenzialgleichung,

wenn man, indem man die Unveränderlichkeit der Constante des allgemeinen Integrals aufhebt, diese Größe eine solche Function von x und y bedeuten läßt, daß die durch die Differenzialgleichung ausgesprochene Verknüpfung zwischen dx und dy dabei unverletzt fortbesteht. Wie diese Function aufgefunden werden könne, zeigt folgende Betrachtung.

Die Differenzialgleichung (1) entsteht aus ihrem allgemeinen Integral (2), wenn man dieses letztere differenzirt, und mittelst des Resultates dieser Operation, welches immer unter der Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \tag{3}$$

erscheint, wobei P und Q Functionen von x, y und a sind, die Constante a aus dem genannten Integral wegschafft. Sobald man a als eine veränderliche Größe betrachtet, erhält man zum Differenzial der Gleichung (2) die Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,da = 0, \tag{4}$$

worin P und Q dieselbe Bedeutung haben wie in (2), und R ebenfalls eine Function von x, y und a ist. Die Gleichung (4) geht nicht nur allein für constante Werthe von a, in Bezug auf welche $da = 0$ ist, sondern auch für alle veränderlichen Werthe von a, durch welche R auf Null reducirt wird, in (3) über. Diese letzteren ergeben sich durch Auflösung der Gleichung

$$R = 0. \tag{5}$$

Da nun der Hergang der Elimination einer Größe aus zwei Gleichungen nicht durch die Beschaffenheit dieser Größe, sondern nur durch die Art ihrer Verbindung mit den übrigen bedingt wird, so erhält man durch Elimination von a aus (2) und (3) offenbar die Endgleichung (1), auch wenn man a als eine variable, durch die Gleichung (5) bestimmte Größe behandelt. Führt man nun das also veränderlich gewordene a in die Gleichung (2) ein, d. h. schafft man a aus (2) mittelst (5) weg, so hat man ebenfalls ein Integral für (1) vor sich, welches aber, in so fern die Gleichung (5) wirklich ein variables a darbietet, und das Ergebniß der Elimination von a aus (2) und (5) nicht auch durch Substitution eines constanten Werthes für a in (2) erzielt werden kann, eine besondere Auflösung der vorgelegten Differenzialgleichung (1) seyn wird.

In dem Gesagten liegt folgende Regel zur Ableitung der besonderen Auflösung einer Differenzialgleichung aus ihrem allgemeinen In-

tegral. Man differenzire dieses Integral in Bezug auf die darin befindliche unbestimmte Constante, indem man die eigentlich variablen Größen als beständige betrachtet, und eliminire aus dem erhaltenen Differenzial und dem vorliegenden allgemeinen Integral die erwähnte Constante. Die Endgleichung ist eine besondere Auflösung der gegebenen Differenzialgleichung, wenn sie durch Specialisirung der im allgemeinen Integral vorhandenen Constante als solchen, nicht erzeugt werden kann.

So gibt uns die in obigem Beispiele erhaltene Integralgleichung $y + ax + a^2 = 0$, in Bezug auf a differenzirt,

$$x + 2a = 0, \text{ also } a = -\frac{x}{2},$$

wodurch diese Integralgleichung in die besondere Auflösung

$$y - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 4y = 0$$

der dortigen Differenzialgleichung sich umstaltet.

Die obige Regel ist unbrauchbar, wenn die allgemeine Integralgleichung (2) auf die Form

$$(6) \qquad \varphi(x, y) = a$$

gebracht wird, so daß linker Hand des Gleichheitszeichens a nicht erscheint. In diesem Falle läßt sich die Aufgabe auf einem anderen Wege lösen.

Denkt man sich nämlich den Ausdruck (6) in die Gleichung (2) substituirt, und die hiedurch entstehende identische Gleichung

$$(7) \qquad F[x, y, \varphi(x, y)] = 0,$$

welche wir der Kürze wegen durch $F(x, y, \varphi) = 0$ andeuten wollen, sowohl in Bezug auf x als auch in Bezug auf y differenzirt, so muß auch jedes dieser partiellen Differenzialien durch bloßes gegenseitiges Aufheben aller Glieder verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \\ \frac{dF(x, y, \varphi)}{dy} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} &= 0 \end{aligned}$$

bestehen. Hier bedeutet $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ offenbar den Differenzialquotienten, welchen man erhält, wenn man die Function $F(x, y, \varphi)$ in Bezug auf x nur in so ferne differenzirt, als diese Variable außer-

halb dem Bereiche der Function $\varphi(x, y)$ erscheint; ein Gleiches gilt von $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dy}$. Es stimmen daher diese Differenzialquotienten mit den Functionen überein, in welche die in (4) vorkommenden Größen P und Q übergehen, wenn man aus denselben die Größe a mittelst (6) wegschafft. Durch dasselbe Verfahren entspringt $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$ aus R. Aus den Gleichungen (8) findet man

$$(9)\quad \frac{d\varphi(x, y)}{dx} = -\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} : \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$$

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dy} = -\frac{dF(x, y, \varphi)}{dy} : \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi};$$

diese letzteren Gleichungen sind eben so wie die Gleichungen (8), aus welchen sie abgeleitet wurden, identisch, d. h. sie bestehen, was man auch immer für Werthe für x und y annehmen mag, also unabhängig von jeder zwischen x und y Statt findenden Verknüpfung. Man lasse nun x zu y in diejenige Relation treten, welche durch die besondere Auflösung der Gleichung (1) ausgesprochen wird, so muß dadurch der partielle Differenzialquotient $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$ seiner Natur nach in die Nulle übergehen; denn derselbe ist offenbar der erste Theil der Endgleichung, auf welche man durch Elimination von a aus den Gleichungen (2) und (5) kömmt, da diese Operation auch dadurch ausgeführt werden kann, daß man a aus (2) sucht und in R substituirt. Gestattet also die vorgelegte Differenzialgleichung (1) eine besondere Auflösung, so stellen sich die partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\varphi(x, y)}{dx}$ und $\frac{d\varphi(x, y)}{dy}$ als Brüche dar, deren Nenner durch genannte Auflösung auf Null reducirt werden. Man wird durch diese Bemerkung in den Stand gesetzt, die in der Frage stehende besondere Auflösung von (1) auch aus (6) ausfindig zu machen; zu diesem Ende ist nichts weiter nöthig, als die Nenner der beiden partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\varphi(x, y)}{dx}$ und $\frac{d\varphi(x, y)}{dy}$, oder vielmehr den gemeinschaftlichen Factor dieser Nenner gleich Null zu setzen. Man wird aber, ehe man die dadurch erhaltene Relation zwischen x und y für eine besondere Auflösung der Differenzialgleichung (1) erklärt, nachsehen, ob durch dieselbe nicht etwa der erste Theil der Gleichung (6) in eine constante Größe über-

geht, weil man in dem letzteren Falle bloß ein partikuläres Integral von (1) gefunden hätte.

Bringt man die Differenzialgleichung (1), indem man daraus $\frac{dy}{dx}$ sucht, auf die Form

$$(10) \qquad \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy = 0,$$

und kennt man den integrirenden Factor L der letzteren, so muß derselbe, wenn man y von x, so wie es die besondere Auflösung der Differenzialgleichung vorschreibt, abhängen läßt, gleichfalls die Nulle im Nenner erhalten. Denn es muß offenbar

$$L\mathfrak{P}dx + L\mathfrak{Q}dy = d\varphi(x, y)$$
$$= \frac{d\varphi(x, y)}{dx}dx + \frac{d\varphi(x, y)}{dy}dy,$$

also $L\mathfrak{P} = \frac{d\varphi(x, y)}{dx}$, $L\mathfrak{Q} = \frac{d\varphi(x, y)}{dy}$,

und demnach $L = \frac{1}{\mathfrak{P}} \cdot \frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{Q}} \cdot \frac{d\varphi(x, y)}{dy}$

seyn, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung nach dem oben Gesagten von selbst erhellet; daß sich hierauf ebenfalls ein Verfahren zur Entdeckung der besonderen Auflösung der Gleichung (1) gründen läßt, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Diese Eigenschaft des integrirenden Factors läßt sich unmittelbar aus dem Begriffe einer besonderen Auflösung nachweisen.

Durch eine solche Auflösung der Gleichung (1) darf nämlich die Function, welche wir $\varphi(x, y)$ genannt haben, nicht auf eine beständige Größe reducirt werden, denn sonst wäre dieselbe ein partikuläres Integral der Gleichung (1); es darf also das Differenzial $d\varphi(x, y)$ nicht verschwinden, d. h. es darf $L(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy)$ nicht gleich Null werden. Aber die besondere Auflösung der Differenzialgleichung (1) muß der Gleichung (10) Genüge leisten, also $\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy$ auf Null reduciren; es erhält demnach durch dieselbe der Multiplicator L die Nulle im Nenner, damit $L(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy)$ in $\frac{0}{0}$ umgestaltet werde, und somit dem Verschwinden entgehe.

Die Methoden zur Bestimmung der besonderen Auflösung der Differenzialgleichung (1), deren wir bis jetzt erwähnt haben, setzen die Kenntniß des allgemeinen Integrals (2) oder (6), oder doch des integrirenden Factors L voraus. Wir wollen nun zeigen, wie man die

besondere Auflösung einer Differenzialgleichung, wenn sie eine solche gestattet, ohne diese Hülfsmittel, bloß aus ihr selbst ableiten könne.

Denken wir uns die allgemeine Integralgleichung (2) differenzirt, wodurch die Gleichung (3) entsteht, und aus dieser letzteren a gesucht, so haben wir dafür einen Ausdruck von der Form

$$(11) \qquad a = \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Substituiren wir denselben in (2), so ergibt sich die Gleichung

$$(12) \qquad F\left[x, y, \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right] = 0,$$

oder kürzer $F(x, y, \psi) = 0$,

welche, wenn sie mit der Differenzialgleichung (1) nicht völlig genau übereinstimmt, sich davon nur durch einen Factor M, welcher x, y und $\frac{dy}{dx}$ enthalten kann, unterscheidet. Setzen wir also

$$(13) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = M \,.\, F(x, y, \psi),$$

so folgt

$$df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = M\, dF(x, y, \psi) + F(x, y, \psi) \,.\, dM.$$

Nun ist

$$dF(x, y, \psi) = \frac{dF(x,y,\psi)}{dx} dx + \frac{dF(x,y,\psi)}{dy} dy + \frac{dF(x,y,\psi)}{d\psi} d\psi,$$

und die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dF(x, y, \psi)}{dx}$, $\frac{dF(x, y, \psi)}{dy}$, welche in eben dem Sinne zu nehmen sind, wie die oben erhaltenen $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$, $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dy}$, unterscheiden sich von den in (3) vorkommenden Functionen P, Q bloß darin, daß in dieselben statt a der Ausdruck (11) eingeführt wurde, welcher letztere Ausdruck aus (3) entsprungen ist, weßwegen sich die Glieder $\frac{dF(x,y,\psi)}{dx} dx + \frac{dF(x,y,\psi)}{dy} dy$ ohne Rücksicht auf irgend eine Verbindung zwischen x und y tilgen, und die Gleichung

$$dF(x, y, \psi) = \frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} d\psi$$

besteht; wir haben demnach, wenn wir hierauf Rücksicht nehmen, und zugleich $\frac{1}{M} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ statt $F(x, y, \psi)$ schreiben:

$$d f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = M \frac{d F(x, y, \psi)}{d \psi} d\psi + \frac{dM}{M} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Der zweite Theil rechter Hand des Gleichheitszeichens und die Größe linker Hand desselben verschwinden wegen (1); daher muß auch

$$(14) \qquad \frac{d F(x, y, \psi)}{d\psi} = 0$$

seyn. Differenzirt man die Gleichung (13) bloß in Bezug auf $\frac{dy}{dx} = p$, so findet man:

$$\frac{d f(x, y, p)}{dp} = M \frac{d F(x, y, \psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dp} + \frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dp} f(x, y, p),$$

also wegen (14) und (1):

$$(15) \qquad \frac{d f(x, y, p)}{dp} = 0;$$

und da

$$d f(x, y, p) = \frac{d f(x, y, p)}{dx} dx + \frac{d f(x, y, p)}{dy} dy + \frac{d f(x, y, p)}{dp} dp$$

ist, auch

$$(16) \qquad \frac{d f(x, y, p)}{dx} + \frac{d f(x, y, p)}{dy} p = 0.$$

Die Gleichungen (15) und (16) sind sowohl unter sich als auch mit (14) gleichbedeutend; mittelst einer der beiden ersteren den Differenzialquotienten p aus (1) wegschaffen, heißt also eben so viel, als diese Operation in Bezug auf die Gleichungen (14) und (12) verrichten; oder weil p dort bloß in ψ erscheint, eben so viel, als ψ aus (14) und (12) eliminiren. Hieraus entspringt aber nothwendig dieselbe Gleichung, auf welche man kömmt, wenn man a aus (5) und (2) eliminirt; folglich führt die Elimination von p sowohl aus (15) und (1), wie auch aus (16) und (1) zur besonderen Auflösung der Gleichung (1), wenn eine solche vorhanden ist. Um über diesen letztern Punct in das Reine zu kommen, muß man beide Eliminationen zugleich vornehmen, und abwarten, ob sie dieselbe Endgleichung darbieten. Dieses Kennzeichen der besonderen Auflösung für (1) läßt sich auch dadurch ausdrücken, daß man sagt, es werde durch dieselbe der Differenzialquotient $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$, so wie er aus der Differenziation der gegebenen Glei-

chung (1) folgt, auf die Form $\frac{0}{0}$ gebracht, denn dieses Resultat erhält man aus der Gleichung

$$\frac{df(x, y, p)}{dx} dx + \frac{df(x, y, p)}{dy} dy + \frac{df(x, y, p)}{dp} dp = 0$$

mit Rücksicht auf (15) und (16).

Die hier nach Lagrange vorgetragene Theorie der besonderen Auflösungen der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit zwei Variablen läßt sich auch auf Gleichungen von höheren Ordnungen mit mehreren Variablen und mit Differenzen ausdehnen, was wir jedoch zu übergehen genöthiget sind, zumal, da sich in der Folge noch Gelegenheiten darbieten werden, einiges hieher Gehörige beizubringen.

Sieben und fünfzigste Vorlesung.

Über die Integration der Gleichungen mit partiellen Differenzialien.

Wenn das Gesetz der Abhängigkeit einer Größe u von mehreren anderen x, y, z, ꝛc. durch eine Gleichung zwischen u, x, y, z, ꝛc. und den partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots$ $\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^2u}{d^2y}, \frac{d^2u}{dx\,dz}, \ldots \frac{d^3u}{dx^3}$, ꝛc. gegeben ist, und gefordert wird, diese Abhängigkeit durch eine Gleichung darzustellen, in welcher bloß die Variablen u, x, y, z, ... erscheinen, so hat man es mit der Integration einer sogenannten Gleichung mit partiellen Differenzialien zu thun.

Da diese Gleichung eine gewisse Anzahl der Differenzialquotienten völlig unbestimmt läßt, so muß auch ihr Integral das Gepräge der Unbestimmtheit an sich tragen. Betrachten wir, um einen einzelnen Fall vor Augen zu haben, jene Verknüpfung zwischen x, y, z, welche durch die Gleichung $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}$ ausgedrückt wird. Hier bleibt die Bedeutung der Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ an sich unentschieden, und es wird bloß festgesetzt, daß das Differenzial $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ die Form

$$dz = \frac{dz}{dx}(dx + dy) = \frac{dz}{dx}d(x + y)$$

besitze. Für $\frac{dz}{dx}$ kann jede Function von x + y angenommen werden, und da sodann das Integral $\int \frac{dz}{dx}d(x+y)$ ebenfalls als eine Function von x + y erscheint, so haben wir

$$z = \varphi(x + y),$$

wobei die Form der Function φ völlig willkürlich ist. Die Gleichung $z = \varphi(x + y)$ ist also das Integral der Gleichung $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}$.

Soll von partiellen Differenzialien einer Größe überhaupt die Rede seyn können, so muß dieselbe wenigstens eine Function zweier

Variablen seyn. Es wird sich demnach eine Gleichung mit partiellen Differenzialien wenigstens auf drei veränderliche Größen beziehen. Kommen in einer solchen Gleichung bloß drei Variable x, y, z, und bloß die Differenzialquotienten der ersten Ordnung $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ in der ersten Potenz vor, so hat sie, wenn wir der Kürze wegen $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ setzen, die Form

$$Pp + Qq = R, \tag{1}$$

wobei P, Q, R Functionen von x, y, z bedeuten.

Um die Integration der Gleichung (1) zu bewerkstelligen, schaffen wir aus ihr mittelst der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{2}$$

einen der Differenzialquotienten p, q weg. Eliminiren wir q, so erhalten wir

$$(P\,dy - Q\,dx)\,p + Q\,dz - R\,dy = 0. \tag{3}$$

Dieser Gleichung wird offenbar durch eine solche Relation zwischen x, y, z Genüge geleistet, für welche die Gleichungen

$$P\,dy - Q\,dx = 0, \quad Q\,dz - R\,dy = 0 \tag{4}$$

Statt finden.

Kommt in $P\,dy - Q\,dx = 0$ die Veränderliche z, und in $Q\,dz - R\,dy = 0$ die Veränderliche x nicht vor, so kann jede dieser Gleichungen für sich allein der Integration unterworfen werden, welche Operation wir hier als ausführbar voraussetzen, wenn gleich es nicht immer möglich ist, dieselbe nach den bis jetzt für die Differenzialgleichungen der ersten Ordnung bekannten Methoden zu Stande zu bringen. Nach verrichteter Integration gibt uns die erste der Gleichungen (4) y als eine Function von x und a, und die zweite z als eine Function von y und b, folglich auch als eine Function von x, a, b, wobei a und b die in den Integralien enthaltenen willkürlichen Constanten sind.

Erscheint bloß in einer der Gleichungen (4) eine veränderliche Größe, deren Differenzial daselbst nicht vorhanden ist, so muß man dieselbe mit Hülfe der anderen Gleichung durch Elimination wegbringen. Kann aber auch die Integration dieser letzteren Gleichung nicht bewerkstelliget werden, so muß man eine der beiden Gleichungen (z. B. die erste) differenziren, und man wird immer im Stande seyn, aus den nun vorhandenen drei Gleichungen eine neue Gleichung abzuleiten,

in welcher sich bloß zwei veränderliche Größen (x und y) nebst ihren ersten und zweiten Differenzialien befinden. Wird die letztere Gleichung, nachdem man das zweite Differenzial einer ihrer Variablen gleich Null gesetzt hat, integrirt, so ist man im Stande, eine der erwähnten Variablen (z. B. y) durch die andere (x) und durch die im Integral enthaltenen zwei willkürlichen Constanten (a, b), und mit Zuziehung der Gleichungen (4) auch die dritte Variable (z) durch die so eben genannten Größen (x, a, b) auszudrücken.

Wie also auch immer die Gleichungen (4) beschaffen seyn mögen, so geben sie uns y und z als Functionen der veränderlichen Größe x und zweier willkürlicher Constanten a, b, welche Functionen der Gleichung (3), und daher auch der vorgelegten Gleichung (1) Genüge leisten. Da es wegen der Unbestimmtheit der Größe p, welche jeder Function von x, y, z gleich gesetzt werden kann, auch möglich ist, die Gleichung (3) oder (1) zu realisiren, ohne die Gleichungen (4) anzunehmen, so haben wir hier nur eine einzelne der unzähligen Auflösungen kennen gelernt, welche der Gleichung (3) oder (1) entsprechen. Durch dieselbe kann jedoch das allgemeinste Integral dieser Gleichung auf folgende Art gefunden werden.

Es sey

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

die allgemeine Integralgleichung für (1), so muß sowohl sie, wie auch die aus ihr entspringende Differenzialgleichung

$$dF(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \tag{6}$$

$$\frac{dF(x, y, z)}{dx} dx + \frac{dF(x, y, z)}{dy} dy + \frac{dF(x, y, z)}{dz} dz = 0$$

durch alle Relationen zwischen x, y, z erfüllt werden, welche der Gleichung (3) genügen. Es finden daher die Gleichungen (5) und (6) auch Statt, wenn man in denselben, den Gleichungen (4) gemäß, y und z durch x, a, b ausdrückt. Allein hiedurch erhält (6) offenbar die Gestalt $U dx = 0$, und diese Gleichung besteht für jeden Werth der independenten Veränderlichen x; ferner kann $U dx$ auch als das Differenzial betrachtet werden, welches die Function $F(x, y, z)$ darbietet, wenn man vor dem Differenziren y und z durch x ausdrückt: es muß also diese Veränderliche durch die erwähnten Substitutionen aus der Function $F(x, y, z)$ gänzlich verschwinden, folglich letztere Function lediglich als eine Function der Constanten a und b erscheinen, welche

wir durch $\Psi(a, b)$ bezeichnen wollen. Es seyen nun M, N die Ausdrücke, welche man für a und b erhält, wenn man diese Constanten mittelst der zwischen denselben und den Variablen x, y, z bestehenden Gleichungen bestimmt, so kann auf die hier beschriebene Art $F(x, y, z)$ sich nicht in $\Psi(a, b)$ verwandeln, wofern nicht $F(x, y, z)$ selbst $= \Psi(M, N)$ ist. Es hat somit die Integralgleichung für (1) die Form

$$(7) \qquad \Psi(M, N) = 0.$$

Die Beschaffenheit der Function Ψ bleibt hier völlig unbestimmt; läßt man also Ψ eine willkürliche Function der innerhalb der Klammern befindlichen Größen bedeuten, so ist (7) die allgemeine Integralgleichung der vorgelegten Gleichung mit partiellen Differenzialien. Da durch die Gleichung (7) eine der Größen M, N als eine Function der andern erklärt wird, so kann man dieser Gleichung auch die Gestalt

$$(8) \qquad M = \varphi(N).$$

geben, wobei φ ebenfalls das Zeichen einer willkürlichen Function ist.

Um also die Gleichung $Pp + Qq = R$ zu integriren, wird man aus den Gleichungen $Pdy - Qdx = 0$, $Qdz - Rdy = 0$ die Integralgleichungen $M = a$, $N = b$, wobei a, b die willkürlichen Constanten sind, ableiten, und sodann $M = \varphi(N)$ setzen.

Eliminirt man aus den Gleichungen (4) das Differenzial dy, so findet man $Pdz - Rdx = 0$; welche Gleichung man, wenn man es für zweckmäßig erachtet, statt einer der Gleichungen (4) in die Rechnung einführen kann. Oft dürfte es auch leichter seyn, aus den Gleichungen $Pdy - Qdx = 0$, $Pdz - Rdx = 0$, $Qdz - Rdy = 0$ durch schickliche Verbindungen derselben zwei integrable Differenzialgleichungen mit drei veränderlichen Größen abzuleiten, als die oben besprochene Integration einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung mit zwei veränderlichen Größen vorzunehmen.

Die Gleichung $Pdz - Rdx = 0$ bietet sich sogleich dar, wenn man den Differenzialquotienten p aus den Gleichungen (1) und (2) wegschafft, und die sich nun statt (3) ergebende Gleichung auf dieselbe Art, wie es oben geschehen ist, in zwei Gleichungen zerlegt.

Will man aus dem Integral (8) zur Prüfung der Richtigkeit desselben die gegebene Gleichung (1) wieder herstellen, so muß man es sowohl in Beziehung auf z und x, als auch in Beziehung auf z und y differenziren, und die in den beiden Resultaten dieser Operation erschei-

nende willkürliche Function, welche offenbar eine und dieselbe seyn wird, eliminiren.

Die für die Gleichung (1) gebrauchte Integrationsmethode läßt sich, wenn man die Integration aller gewöhnlichen Differenzialgleichungen als ausführbar voraussetzt, auch auf Gleichungen mit mehr als drei Variablen anwenden, wenn die darin befindlichen partiellen Differenzialquotienten bloß in der ersten Potenz erscheinen.

Es sey z. B. die Gleichung

$$(9) \qquad Pp + Qq + Rr = S$$

zu integriren, worin P, Q, R, S Functionen von u, x, y, z vorstellen, und $p = \frac{du}{dx}$, $q = \frac{du}{dy}$, $r = \frac{du}{dz}$ ist.

Eliminirt man aus derselben den Quotienten r mittelst der Gleichung

$$du = pdx + qdy + rdz,$$

so ergibt sich

$$(10) \quad (Pdz - Rdx)p + (Qdz - Rdy)q + Rdu - Sdz = 0.$$

Man leite nun aus den Gleichungen

$$(11) \quad Pdz - Rdx = 0, \; Qdz - Rdy = 0, \; Rdu - Sdz = 0,$$

oder aus anderen ihnen gleichgeltenden, die Integralgleichungen

$$(12) \qquad L = a, \quad M = b, \quad N = c$$

ab, worin L, M, N Functionen von u, x, y, z, und a, b, c willkürliche Constanten bedeuten, so ist

$$(13) \qquad L = \varphi(M, N),$$

worin φ eine willkürliche Function anzeigt, die Integralgleichung für (9). Der Beweis für die Gültigkeit dieses Verfahrens ist dem oben geführten ähnlich, und kann daher füglich übergangen werden.

Da in (13) vier Variable vorkommen, so läßt sich diese Gleichung, wenn man eine der Variablen als eine Function der übrigen betrachtet, drei Mal partiell differenziren; in den erhaltenen Differenzialgleichungen erscheinen zwei willkürliche Functionen, nämlich

$$\frac{d\varphi(M, N)}{dM} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi(M, N)}{dN},$$

durch deren Elimination die gegebene Gleichung (9) entsteht. Hieraus erhellet zugleich, daß das Integral einer partiellen Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit drei Variablen bloß eine willkürliche Function,

und diese nur mit einer Grundgröße verträgt; denn dasselbe bietet bloß zwei partielle Differenzialquotienten der ersten Ordnung dar, durch deren Verknüpfung zu einer Gleichung es nicht möglich ist, mehr als eine beiden gemeinschaftliche Function wegzubringen.

Enthält eine Gleichung höhere Potenzen partieller Differenzialquotienten der ersten Ordnung, so läßt sie sich, wenn darin bloß drei Variable erscheinen, auf eine Gleichung mit vier veränderlichen Größen, in welcher die partiellen Differenzialquotienten in der ersten Potenz stehen, reduciren.

Es sey

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{14}$$

die zu integrirende partielle Differenzialgleichung der ersten Ordnung. Differenzirt man dieselbe theilweise in Bezug auf x, y und z, in so fern man p und q als Functionen dieser veränderlichen Größen betrachtet, so erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = 0, \\ &\frac{df}{dy} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dy} = 0, \\ &\frac{df}{dz} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dz} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dz} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

in welchen der Kürze wegen f statt $f(x, y, z, p, q)$ steht.

Kommen in p und q bloß x und y vor, so ist bekannter Maßen $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$; da wir aber hier auch z in diesen Größen enthalten denken, so haben wir statt dieser Gleichung

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

zu setzen, oder was dasselbe ist:

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dz}\, p - \frac{dp}{dz}\, q = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der in der vier und fünfzigsten Vorlesung erhaltenen Gleichung (13), wenn man dieselbe auf die Differenzialgleichung $p\,dx + q\,dy - dz = 0$ anwendet, indem man daselbst $p, q, -1$ statt P, Q, R schreibt.

Man kann nun aus der Gleichung (16) mit Hülfe zweier der Gleichungen (15) und der Gleichung (14) nach Belieben entweder

p, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, oder q, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz}$ wegschaffen, wodurch man eine partielle Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen den vier Variablen x, y, z und q oder p erhält, in welcher die Differenzialquotienten bloß in der ersten Potenz vorhanden sind. Integrirt man dieselbe nach dem oben gelehrten Verfahren, so ist man im Stande, mit Rücksicht auf (14), sowohl p als q durch x, y, z auszudrücken, folglich die Auflösung der vorgelegten Aufgabe nur noch von der Integration der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

abhängig zu machen.

Eliminirt man vorläufig $\frac{dq}{dx}$ und $\frac{dq}{dz}$ aus (16) mittelst der aus (15) sich ergebenden Ausdrücke

$$\frac{dq}{dx} = -\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}\right) : \frac{df}{dq},$$
$$\frac{dq}{dz} = -\left(\frac{df}{dz} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dz}\right) : \frac{df}{dq},$$

so findet man die Gleichung

$$(17) \qquad \frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dp}{dy} + \left[p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right]\frac{dp}{dz} = 0,$$

welche noch mit der Gleichung (14) combinirt werden muß, um q aus derselben zu entfernen. Da diese Operation immer ausführbar ist, so können wir q daselbst als eine Function von x, y, z, p betrachten.

Die Integration der Gleichung (17) hängt nun, wenn man statt der Gleichungen (11) die ihnen gleichgeltenden

$$P\,dy - Q\,dx = 0, \quad P\,dz - R\,dx = 0, \quad P\,du - S\,dx = 0$$

wählt, und wie es der vorliegende Fall erfordert,

$$u = p, \quad P = \frac{df}{dp}, \quad Q = \frac{df}{dq},$$
$$R = p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}, \quad S = -\left(\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz}\right)$$

setzt, von der Integration nachstehender Gleichungen ab:

$$(18)\qquad \frac{df}{dp}\,dy - \frac{df}{dq}\,dx = 0$$

$$\frac{df}{dp}\,dz - \left[p\,\frac{df}{dp} + q\,\frac{df}{dq}\right]dx = 0$$

$$\frac{df}{dp}\,dp + \left[\frac{df}{dx} + p\,\frac{df}{dz}\right]dx = 0.$$

Gelingt dieselbe, so bieten sie uns drei Integralgleichungen

$$(19)\qquad L = a,\quad M = b,\quad N = c$$

dar, in welchen a, b, c willkürliche Constanten, und L, M, N Functionen von x, y, z, p anzeigen; und hieraus folgt, in so fern φ eine willkürliche Function andeutet,

$$(20)\qquad L = \varphi\,(M,\ N)$$

als das Integral der Gleichung (17). Dieses gibt uns, sobald über die Form der Function φ verfügt worden ist, p als eine Function von x, y, z; wir haben folglich auch q als eine solche Function, und sind nun im Stande die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ weiter zu behandeln.

Hier zeigt sich jedoch die Schwierigkeit, daß das Integral einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit drei Variablen eine willkürliche Function zweier Größen zu fordern scheint, während, wie wir oben bemerkt haben, die Natur der Sache nur eine solche Function mit einer Grundgröße in demselben zuläßt. Diese Schwierigkeit hebt Lagrange, von welchem die in dieser Vorlesung vorgetragenen Methoden herrühren, auf folgende Art:

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (18) mit q, und subtrahirt man sie sodann von der zweiten, so ergibt sich

$$(dz - p\,dx - q\,dy)\,\frac{df}{dp} = 0.$$

Die Gleichungen (18) gehen, wenn man in dieselben die aus (19) folgenden Werthe von x, y, z substituirt, offenbar in identische über, daher wird dadurch auch $dz - p\,dx - q\,dy$ identisch auf Null reducirt. Behandelt man aber bei diesen Substitutionen die willkürlichen Constanten a, b, c als variable Größen, so heben sich die mit dp verbundenen Glieder des Ausdruckes $dz - p\,dx - q\,dy$ wie vorhin auf, und die Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ verwandelt sich in

$$(21)\qquad A\,da + B\,db + C\,dc = 0,$$

worin A, B, C Functionen von p, a, b, c vorstellen. Nun ist aber

auch $c = \varphi(a, b)$, folglich $dc = \frac{d\varphi}{da} da + \frac{d\varphi}{db} db$; nehmen wir darauf Rücksicht, so geht die Gleichung (21) in

$$(22) \qquad \left[A + C \frac{d\varphi}{da}\right] da + \left[B + C \frac{d\varphi}{db}\right] db = 0 \quad \text{über.}$$

Diese Gleichung ist nothwendiger Weise integrabel; es kann also p in derselben nicht vorkommen, und es wird durch ihr Integral b als eine Function von a erklärt. Es sind demnach b und c Functionen von a allein, welche jedoch der Gleichung (21) unterliegen, so daß, wenn wir $b = \varphi(a)$, $c = \psi(a)$ annehmen,

$$A + B \frac{d\varphi(a)}{da} + C \frac{d\psi(a)}{da} = 0$$

seyn muß, wodurch eine Relation zwischen den Functionen φ und ψ festgesetzt wird, und deßhalb bloß eine derselben willkürlich bleibt. Das Integral der Gleichung (14) ergibt sich also, wenn man aus den zwei Gleichungen $M = \varphi(L)$, $N = \psi(L)$ die Größe p wegschafft.

Da jedoch die Form dieses Integrals verwickelter ausfällt, als sie es früher war, indem sie nun mittelst dreier Gleichungen gegeben wird, unter welchen sogar eine Differenzialgleichung sich befindet; so hat Poisson sich veranlaßt gefunden, die oben erwähnte Schwierigkeit auf einem anderen Wege zu beseitigen, welchen wir hier in Kürze andeuten wollen.

Denkt man sich eine der Gleichungen (19), z. B. $L = a$, in Bezug auf p aufgelöst, wodurch man

$$(23) \qquad p = \Phi(x, y, z, a)$$

findet, und diesen Ausdruck in die beiden andern Gleichungen eingeführt, welche dadurch in $b = \Phi_1(x, y, z, a)$ und $c = \Phi_2(x, y, z, a)$ übergehen mögen; so nimmt die Gleichung (20) die Gestalt

$$(24) \qquad a = \varphi[\Phi_1(x, y, z, a), \Phi_2(x, y, z, a)]$$

an, mit deren Hülfe sich das in (23) vorkommende a durch x, y, z ausdrücken läßt. Die Beschaffenheit von a wird übrigens durch die Form der willkürlichen Function φ bestimmt, statt welcher man auch eine Constante setzen kann, in welchem Falle a selbst constant ausfällt. Läßt man die letztere Annahme gelten, und bezeichnet man das auf den obigen Werth von p und den damit in Verbindung stehenden von q sich beziehende Integral der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ durch

$$(25) \qquad F(x, y, z, a) = k,$$

wobei k eine willkürliche Constante ist, so kann dasselbe auch noch auf alle übrigen durch die Gleichung (24) gegebenen Werthe von a ausgedehnt werden, wenn man

$$(26) \qquad \frac{dF(x, y, z, a)}{da} da = dk$$

setzt, damit das Differenzial der Gleichung (25) dasselbe bleibe, a mag beständig oder veränderlich seyn. Soll k mittelst (26) bestimmt werden können, so darf der erste Theil dieser Gleichung x, y, z nicht enthalten, d. h. es muß

$$(27) \qquad \frac{dF(x, y, z, a)}{da} = \Psi(a, k)$$

seyn, wobei Ψ eine willkürliche Function vorstellt. Hieraus folgt

$$dk = \Psi(a, k)\, da, \quad \text{also} \quad k = \psi(a),$$

und es verwandeln sich die Gleichungen (25) und (27) in

$$(28) \quad F(x, y, z, a) = \psi(a) \text{ und } \frac{dF(x, y, z, a)}{da} = \frac{d\psi(a)}{da},$$

welche zwei Gleichungen mit einander verbunden das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differenzialgleichung darstellen, und nur eine willkürliche Function mit einer Grundgröße enthalten.

Hieraus erhellet zugleich, daß ein partikuläres mit einer willkürlichen Constante versehenes Integral der Gleichung (16), wie (25) ist, hinreicht, das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differenzialgleichung zu erhalten.

Acht und fünfzigste Vorlesung.

Uber die Integration der Gleichungen mit partiellen Differenzialien.

(Fortsetzung.)

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung die Integration partieller Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit drei Variablen, in welchen die Differenzialquotienten nicht bloß in der ersten Potenz stehen, auf die Integration partieller Differenzialgleichungen derselben Ordnung mit vier veränderlichen Größen, deren Differenzialquotienten in der ersten Potenz erscheinen, zurückgeführt. Versucht man ein ähnliches Verfahren bei wie immer gestalteten partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit vier und mehreren veränderlichen Größen in Anwendung zu bringen, so stößt man bald auf beträchtliche Hindernisse *). Diesen ist eine von J. F. Pfaff erdachte allgemeine Integrationsmethode partieller Differenzialgleichungen der ersten Ordnung (Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin, aus den Jahren 1814—1815. Mathematische Klasse, S. 76), welche sich auch auf gewöhnliche Differenzialgleichungen erstreckt, nicht unterworfen. Wir wollen dieselbe, ihrem Erfinder folgend, zuerst bei partiellen Differenzialgleichungen mit drei Variablen in Anwendung bringen.

Es sey mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

die zu integrirende Differenzialgleichung. Drückt man mittelst derselben q durch x, y, z, p aus, so bleibt in der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{2}$$

p unbestimmt. Man kann daher diese letztere als eine gewöhnliche Differenzialgleichung mit vier veränderlichen Größen x, y, z, p betrachten, in welcher jedoch das Differenzial von p die Nulle zum Coefficienten erhielt, und deßhalb nicht vorhanden ist. Denken wir uns

*) Eine nähere Angabe derselben findet man in Lacroix's Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, seconde édition. Tome II. Nro. 748, p. 567 etc.

nun z, x, p als Functionen der veränderlichen y und dreier neuer unbestimmter Größen a, b, c, so bleiben die Formen dieser Functionen ebenfalls unbestimmt, da die drei Größen a, b, c zur Bestimmung von z, x, p völlig hinreichen. Diese Formen können also so gewählt werden, daß die Gleichung (2), welche im Allgemeinen nebst a, b, c auch y enthalten wird, von der letztgenannten Größe wie auch von ihrem Differenzial frei erscheint.

Es sey

(3) $$\begin{aligned} dx &= X dy + X_1 da + X_2 db + X_3 dc, \\ dz &= Z dy + Z_1 da + Z_2 db + Z_3 dc, \\ dp &= P dy + P_1 da + P_2 db + P_3 dc, \end{aligned}$$

wobei X, X_1, X_2, X_3, Z, Z_1, rc. unbestimmte Functionen von y, a, b, c vorstellen, ferner vermöge der Gleichung (1)

(4) $$dq = q_1 dx + q_2 dy + q_3 dz + q_4 dp,$$

wobei q_1, q_2, q_3, q_4 bekannte Functionen von x, y, z, p bedeuten. Die Gleichung (2) gibt uns mit Hülfe der ersten zwei Gleichungen (3)

(5) $$o = (Z - pX - q) dy + (Z_1 - pX_1) da + (Z_2 - pX_2) db + (Z_3 - pX_3) dc.$$

Das Differenzial dy fehlt in dieser Gleichung, wenn

(6) $$Z = pX + q$$

ist, und y, wenn die in Bezug auf diese Variable genommenen Differenzialquotienten der Coefficienten von db und dc in der rückständigen Gleichung

(7) $$o = da + \frac{Z_2 - pX_2}{Z_1 - pX_1} db + \frac{Z_3 - pX_3}{Z_1 - pX_1} dc$$

gleich Null sind. Bezeichnen wir der Kürze wegen einen partiellen Differenzialquotienten, wie $\frac{d\omega}{dy}$, durch $d_y \omega$, so gibt uns die Voraussetzung $d_y \left(\frac{M}{N}\right) = o$ nothwendig

$$N d_y M - M d_y N = o \quad \text{oder} \quad \frac{d_y M}{M} = \frac{d_y N}{N},$$

und die Bedingung des Verschwindens von y aus der Gleichung (7) wird dem zu Folge durch

(8) $$\frac{d_y (Z_1 - pX_1)}{Z_1 - pX_1} = \frac{d_y (Z_2 - pX_2)}{Z_2 - pX_2} = \frac{d_y (Z_3 - pX_3)}{Z_3 - pX_3}$$

ausgedrückt.

Nun ist $d_y(Z_1 - pX_1) = d_y Z_1 - p d_y X_1 - X_1 d_y p$; oder, weil die Gleichungen (3) $d_y Z_1 = d_a Z$, $d_y X_1 = d_a X$ geben:

$$d_y(Z_1 - pX_1) = d_a Z - p d_a X - X_1 d_y p;$$

welcher Ausdruck, mit dem in Bezug auf a genommenen Differenzial der Gleichung (6) verglichen, in

$$d_y(Z_1 - pX_1) = d_a q + X d_a p - X_1 d_y p$$

übergeht; ferner ist wegen (4) und (3)

$$d_a q = q_1 d_a x + q_2 d_a y + q_3 d_a z + q_4 d_a p$$
$$= q_1 X_1 + q_3 Z_1 + q_4 P_1 \quad \text{und} \quad d_y p = P, \quad \text{folglich}$$

$$(9) \qquad \frac{d_y(Z_1 - pX_1)}{Z_1 - pX_1} = \frac{q_3 Z_1 + (q_1 - P) X_1 + (q_4 + X) P_1}{Z_1 - pX_1}.$$

Die Quotienten $\frac{d_y(Z_2 - pX_2)}{Z_2 - pX_2}$ und $\frac{d_y(Z_3 - pX_3)}{Z_3 - pX_3}$ erhält man sogleich, wenn man in (9) Z_1, X_1 mit Z_2, X_2 und Z_3, X_3 verwechselt.

Der Gleichung (8) wird offenbar Genüge geleistet, wenn man

$$(10) \qquad q_4 + X = 0, \quad q_1 - P = - p q_3$$

setzt, wodurch jeder der drei Quotienten in q_3 übergeht.

Aus (10) und (6) folgt nun

$$(11) \qquad X = - q_4, \quad P = q_1 + p q_3, \quad Z = q - p q_4.$$

Werden also für X, P, Z diese Werthe, welche, wie man sieht, durch bekannte Functionen von x, y, z, p ausgedrückt erscheinen, gewählt, so ist die transformirte Gleichung (7) von y und dy frei, und enthält bloß die Größen a, b, c sammt ihren Differenzialien. Es kommt nun darauf an, die Coefficienten dieser Differenzialien in der Gleichung (7) durch a, b, c wirklich darzustellen.

Zu diesem Ende betrachte man a, b, c in den Gleichungen (3) als beständige Größen, und setze dem zu Folge

$$(12) \qquad \begin{aligned} dx &= X dy = - q_4 dy \\ dz &= Z dy = (q - p q_4) dy \\ dp &= P dy = (q_1 + p q_3) dy. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich stets integriren, d. h. es läßt sich stets jede der Größen x, z, p durch y ausdrücken. Man differenzire nämlich die erste Gleichung, indem man dy als constant behandelt, so findet man $d^2x = dX \,.\, dy$, wobei dX die Form

$$H dx + I dy + K dz + L dp$$

hat. Diese geht aber mit Hülfe der Gleichungen (12) in $M dy$ über,

daher wird $d^2x = M\,dy^2$, wobei M von x, y, z, p abhängt. Durch Differenziation dieser letzteren Gleichung ergibt sich auf dieselbe Art $d^3x = N\,dy^3$. Schafft man jetzt aus den drei Gleichungen

$$(13)\qquad dx = X\,dy,\quad d^2x = M\,dy^2,\quad d^3x = N\,dy^3$$

die Größen z und p weg, so bleibt eine Differenzialgleichung der dritten Ordnung zwischen x und y, mittelst deren Integral x durch y und drei willkürliche Constanten α, β, γ ausgedrückt werden kann. Die Gleichungen (13) verhelfen sodann zu Ausdrücken für z und p durch eben dieselben Größen. Diese Integrationsmethode der Gleichungen (12) ist eine allgemeine; in einigen besonderen Fällen kömmt man jedoch auch auf einfacheren Wegen zum Ziele.

Setzt man nun in den gefundenen Ausdrücken für x, z und p die Größen a, b, c statt α, β, γ, und betrachtet man die genannten Größen wieder als veränderliche, so erscheinen in dx, dz, dp für X, Z, P nothwendig die oben dafür angenommenen Werthe (11); zugleich aber ergeben sich von selbst die schicklichen Werthe für X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3, in Bezug auf welche die Coefficienten von db und dc in (7) bloß als Functionen von a, b, c auftreten.

Wir haben es also gegenwärtig noch mit der Differenzialgleichung (7) zu thun, welche die Form

$$(14)\qquad da + B\,db = C\,dc$$

hat, in welcher B und C bekannte Functionen von a, b, c anzeigen. Wenn auch dieselbe der in der vier und fünfzigsten Vorlesung aufgestellten Gleichung (13) nicht Genüge leistet, also kein in einer einzigen Gleichung darstellbares Integral verträgt, so kann sie doch immer durch ein System zweier Gleichungen auf folgende Art integrirt werden. Man behandle c anfänglich als eine beständige Größe, und integrire unter dieser Voraussetzung die Gleichung $da + B\,db = 0$. Das Integral, auf welchem Wege es immer gefunden seyn mag, läßt sich unter der Form $U = Const.$ darstellen, wobei U eine Function von a, b, c ist, und die Constante nach Belieben von c abhängen kann. Man setze daher

$$(15)\qquad U = \varphi(c),$$

indem man unter φ eine willkürliche Function versteht.

Betrachtet man jetzt c als veränderlich, so ergibt sich durch Differenziation $dU = \lambda(da + B\,db) + \frac{dU}{dc}\,dc$, wobei λ den inte-

grirenden Factor der Differenzialformel $da + Bdb$ anzeigt; oder wegen $da + Bdb = Cdc$, mit Rücksicht auf (15):

$$\lambda C + \frac{dU}{dc} = \frac{d\varphi(c)}{dc}. \tag{16}$$

Die Gleichungen (15) und (16), mit einander verbunden, stellen das allgemeinste Integral der Gleichung (14) dar; welches also, wie man sieht, eine willkürliche Function mit sich führt.

Die Größen a, b, c können aber durch x, y, z, p ausgedrückt werden, weil x, z, p als Functionen von y, a, b, c gegeben sind; man hat daher, wenn man mit Hülfe dieser Ausdrücke a, b, c aus (15) und (16) wegschafft, zwei mit einer willkürlichen Function versehene Gleichungen zwischen x, y, z, p, welche nach vollzogener Elimination von p das Integral der vorgelegten partiellen Differenzialgleichung (1) darbieten.

Wir haben bei dieser Gelegenheit ein allgemeines Integrations-Verfahren für gewöhnliche Differenzialgleichungen mit drei veränderlichen Größen kennen gelernt. Dabei ist nur noch zu bemerken, daß wenn die Gleichung (16) entweder für sich allein, oder wenigstens mit Zuziehung der Gleichung (15), keine anderen veränderlichen Größen als c und $\varphi(c)$ enthält, die Function $\varphi(c)$ bestimmt, und somit das Integral der Differenzialgleichung (14) durch eine einzige mit einer willkürlichen Constante versehenen Gleichung zwischen a, b, c ausgedrückt werden könne. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß der letztere Umstand durch die Gleichung (13) der vier und fünfzigsten Vorlesung bedingt wird.

Die Gleichung (2) ist ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung zwischen vier Variablen z, x, y, p:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp, \tag{17}$$

in welcher H, K, L Functionen von z, x, y, p vorstellen, wenn man $H = p$, $K = q$, $L = 0$ setzt, und q durch die Gleichung (1) als eine Function von x, y, p gegeben ansieht.

Das Verfahren, welches oben zur Integration der Gleichung (2) diente, kann auch zur Integration der Gleichung (17) gebraucht werden.

Man betrachte nämlich x, y, p als Functionen von z und der drei Größen a, b, c, und setze

$$\begin{aligned} dx &= Xdz + X_1 da + X_2 db + X_3 dc, \\ dy &= Ydz + Y_1 da + Y_2 db + Y_3 dc, \\ dp &= Pdz + P_1 da + P_2 db + P_3 dc, \end{aligned} \tag{18}$$

wobei die Coefficienten der einzelnen Differenzialien vor der Hand noch unbestimmt sind; ferner

$$(19)\quad \begin{aligned} dH &= H_1 dx + H_2 dy + H_3 dp + H_4 dz, \\ dK &= K_1 dx + K_2 dy + K_3 dp + K_4 dz, \\ dL &= L_1 dx + L_2 dy + L_3 dp + L_4 dz, \end{aligned}$$

wobei die Coefficienten H_1, H_2, ꝛc. gegebene Functionen von z, x, y, p bedeuten, so geben erstlich die Gleichungen (18) mit (17) verbunden:

$$(20)\quad \begin{aligned} o = (HX + KY + LP - 1)\, dz &+ (HX_1 + KY_1 + LP_1)\, da \\ &+ (HX_2 + KY_2 + LP_2)\, db + (HX_3 + KY_3 + LP_3)\, dc. \end{aligned}$$

Damit aus dieser Gleichung dz wegfalle, sey

$$(21)\quad HX + KY + LP = 1;$$

ferner, damit die Gleichung (20) kein z enthalte:

$$(22)\quad \frac{d_z(HX_1 + KY_1 + LP_1)}{HX_1 + KY_1 + LP_1} = \frac{d_z(HX_2 + KY_2 + LP_2)}{HX_2 + KY_2 + LP_2} = \frac{d_z(HX_3 + KY_3 + LP_3)}{HX_3 + KY_3 + LP_3}.$$

Verrichtet man die in dem Ausdrucke $d_z(HX_1 + KY_1 + LP_1)$ angezeigte Differenziation wirklich, übersetzt man sodann die auf z sich beziehenden partiellen Differenzialquotienten in die ihnen gleichgeltenden in Bezug auf a genommenen, so findet man, die Gleichungen (19) und (21) gehörig berücksichtigend, nach einer leichten Rechnung

$$(23)\quad \frac{d_z(HX_1 + KY_1 + LP_1)}{HX_1 + KY_1 + LP_1} =$$

$$= \left.\begin{aligned} &[(H_2 - K_1)Y + (H_3 - L_1)P + H_4]\, X_1 \\ + &[(K_1 - H_2)X + (K_3 - L_2)P + K_4]\, Y_1 \\ + &[(L_1 - H_3)X + (L_2 - K_3)Y + L_4]\, P_1 \end{aligned}\right\} : (HX_1 + KY_1 + LP_1),$$

woraus sich durch Vertauschung von X_1, Y_1, P_1 mit X_2, Y_2, P_2 und X_3, Y_3, P_3 ähnliche Ausdrücke für

$$\frac{d_z(HX_2 + KY_2 + LP_2)}{HX_2 + KY_2 + LP_2} \text{ und } \frac{d_z(HX_3 + KY_3 + LP_3)}{HX_3 + KY_3 + LP_3}$$

ergeben. Der Gleichung (22) wird Genüge geleistet, wenn

$$(24)\quad \begin{aligned} &K[(H_2 - K_1)Y + (H_3 - L_1)P + H_4] = \\ &= H[(K_1 - H_2)X + (K_3 - L_2)P + K_4] \end{aligned}$$

und

$$(25)\quad \begin{aligned} &L[(H_2 - K_1)Y + (H_3 - L_1)P + H_4] = \\ &= H[(L_1 - H_3)X + (L_2 - K_3)Y + L_4] \end{aligned}$$ ist.

Bestimmt man mittelst der Gleichungen (21), (24), (25) die unbekannten Größen X, Y, P, so erhält man

$$(26)\quad X = \frac{L K_4 - K L_4 + K_3 - L_2}{H K_3 - H_3 K + K L_1 - L K_1 + L H_2 - H L_2},$$

$$Y = \frac{H L_4 - L H_4 + L_1 - H_3}{H K_3 - H_3 K + K L_1 - L K_1 + L H_2 - H L_2},$$

$$P = \frac{K H_4 - H K_4 + H_2 - K_1}{H K_3 - H_3 K + K L_1 - L K_1 + L H_2 - H L_2},$$

wodurch X, Y, P als Functionen von z, x, y, p erscheinen.

Behandelt man nun in (18) a, b, c als beständig, und integrirt man die sich hiedurch ergebenden Gleichungen

$$(27)\qquad dx = X dz,\quad dy = Y dz,\quad dp = P dz,$$

indem man aus denselben durch Elimination zweier der Größen x, y, z, p und ihrer Differenzialien auf ähnliche Weise, wie dieß oben mit den Gleichungen (3) geschehen ist, eine Differenzialgleichung der dritten Ordnung zwischen den beiden übrigen der genannten Größen ableitet, und letztere Differenzialgleichung integrirt, so ist man im Stande, x, y, p durch z und drei willkürliche Constanten a, b, c auszudrücken. Läßt man nun a, b, c veränderlich werden, so gibt die in dieser Beziehung vorgenommene Differenziation der für x, y, p gefundenen Ausdrücke unmittelbar die Werthe der Coefficienten der Differenzialien da, db, dc in den Gleichungen (18), durch welche z aus der Gleichung (20) wegfällt. Die zwischen den Größen a, b, c nun vorhandene Differenzialgleichung kann, wie wir oben gesehen haben, durch ein System zweier Gleichungen integrirt werden, worin sich im allgemeinsten Falle eine willkürliche Function befindet: daher gilt, wenn man a, b, c wieder durch x, y, z, p ausdrückt, dasselbe auch von der vorgelegten Differenzialgleichung (17).

Bezeichnen wir durch F, $\overset{1}{F}$, f bekannte, und durch ψ eine willkürliche Function, ferner durch $d_f\psi$ den in Bezug auf die Function f als Grundgröße genommenen Differenzialquotienten der Function ψ, so erscheint das Integral sowohl der partiellen Differenzialgleichung (1) mit drei Variablen x, y, z, wobei $p = \frac{dz}{dx}$ ist, als auch der gewöhnlichen (17) mit vier Variablen x, y, z, p in dem Systeme zweier Gleichungen von den Formen

$$(28)\qquad F(x, y, z, p) = \psi[f(x, y, z, p)]$$

$$\overset{1}{F}(x, y, z, p) = d_f\psi[f(x, y, z, p)];$$

Es läßt sich beweisen, daß das Resultat (28) der vorhergehenden Vorlesung damit vollkommen übereinstimmt.

So wie die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung mit drei Variablen bewerkstelliget werden konnte, indem man eine dieser Variablen anfänglich als constant betrachtete, und die nun vorhandene Differenzialgleichung mit zwei Variablen integrirte, läßt sich auch eine Differenzialgleichung mit fünf Variablen vor der Hand als eine Gleichung zwischen vier veränderlichen Größen behandeln, und mit Hülfe der so eben aufgelösten Aufgabe integriren.

Es sey

$$(29) \qquad du = \mathrm{H}dx + \mathrm{K}dy + \mathrm{L}dz + \mathrm{M}dp$$

die zu integrirende Differenzialgleichung zwischen den fünf Variablen u, x, y, z, p. Wird anfänglich p als constant angesehen, so haben wir

$$(30) \qquad du = \mathrm{H}dx + \mathrm{K}dy + \mathrm{L}dz.$$

Das Integral dieser Differenzialgleichung wird, der Formel (28) gemäß, durch das System zweier Gleichungen, wie folgende

$$(31) \qquad F(u, x, y, z, p) = \psi[f(u, x, y, z, p), p]$$

$$\overset{1}{F}(u, x, y, z, p) = d_f\psi[f(u, x, y, z, p), p]$$

sind, ausgedrückt. Hier ist p ebenfalls hinter die Functionszeichen $F, \overset{1}{F}, f, \psi$ gesetzt worden, weil die betreffenden Functionen diese Größe als eine beständige in sich enthalten dürfen. Um nun das Integral (31) auf den Fall, wenn p veränderlich ist, auszudehnen, differenziren wir die erste der dasselbe bildenden Gleichungen, so finden wir, wenn wir der Kürze wegen F statt $F(u, x, y, z, p)$ schreiben, und eben so mit den übrigen Functionen verfahren:

$$d_u F du + d_x F dx + d_y F dy + d_z F dz + d_p F dp =$$

$$= d_f\psi \,.\, df + d_p\psi \,.\, dp = \overset{1}{F}(u, x, y, z, p) \,.\, [d_u f du$$
$$+ d_x f dx + d_y f dy + d_z f dz + d_p f dz] + d_p\psi dp.$$

Suchen wir aus dieser Gleichung das Differenzial du, so erhalten wir dafür einen Ausdruck von der Form

$$(32) \qquad du = \mathfrak{H}dx + \mathfrak{K}dy + \mathfrak{L}dz + \mathfrak{M}dp,$$

wobei die Werthe von $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ sich leicht angeben lassen. Die ersten drei dieser Größen hängen bloß von bekannten Functionen ab; nur in dem Ausdrucke der vierten erscheint die willkürliche Function $d_p\psi$.

Da wir für $dp = 0$ die Gleichung $du = \mathfrak{H}dx + \mathfrak{K}dy + \mathfrak{L}dz$ erhalten, und diese aus (31) abgeleitet wurde, so muß dieselbe, wenn anders (31) das Integral für (30) ist, mit (30) zusammenfallen, d. h. es muß $\mathfrak{H} = H$, $\mathfrak{K} = K$, $\mathfrak{L} = L$ seyn; setzt man nun auch $\mathfrak{M} = M$, so stimmt (32) mit (29) überein. Die letztere Annahme führt auf eine Gleichung von der Form

$$(33) \quad \dot{F}(u, x, y, z, p) = d_p \psi [f(u, x, y, z, p), p].$$

Diese muß also noch zu (31) hinzukommen, um das Integral der Gleichung (29), worin p als veränderliche Größe vorkommt, zu erhalten.

Es läßt sich demnach jede mit fünf veränderlichen Größen versehene Gleichung mit gewöhnlichen Differenzialien durch ein System dreier Gleichungen integriren, worin eine willkürliche Function zweier Größen, sammt den auf diese zwei Größen sich beziehenden partiellen Differenzialquotienten derselben, erscheint.

So kann man nun weiter schreiten, und zeigen, daß jede partielle Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit vier veränderlichen Größen, welche immer als eine Gleichung mit gewöhnlichen Differenzialien und sechs Variablen betrachtet werden darf, worin aber das Differenzial einer dieser Variablen fehlt; ferner auch eben so jede vollständige Gleichung mit gewöhnlichen Differenzialien und sechs Variablen sich auf eine gewöhnliche Differenzialgleichung mit fünf veränderlichen Größen reduciren, und demnach durch ein System dreier Gleichungen integriren läßt, weßwegen auch die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung mit sieben Variablen nur ein System von vier Gleichungen fordert.

Im Allgemeinen kann jede Gleichung der ersten Ordnung, mit gewöhnlichen Differenzialien und $2n - 1$ oder $2n$ Variablen, wie auch jede Gleichung mit partiellen Differenzialien und $n + 1$ Variablen, wovon die beiden letzteren sich auf eine gewöhnliche Differenzialgleichung der ersteren Art reduciren lassen, durch ein System von n Gleichungen integrirt werden. Allein die Reduction einer gewöhnlichen Differenzialgleichung mit $2n + 1$ Variablen auf eine Differenzialgleichung mit $2n$ Variablen, läßt sich auf dem hier betretenen Wege nicht vollbringen, wofern nicht zwischen den Coefficienten der Differenzialien in derselben eine bestimmte Relation Statt findet. Hievon kann man sich durch die Betrachtung eines besonderen Falles leicht überzeugen. Ver-

sucht man eine Gleichung mit drei Variablen auf eine bloß mit zwei Variablen versehene zu reduciren, so findet man das Gelingen dieser Umstaltung von der bekannten Bedingungsgleichung der Integrabilität (vier und fünfzigste Vorlesung, 13) abhängig.

Was die Gleichungen mit partiellen Differenzialien der zweiten und der höheren Ordnungen betrifft, so hat man bis jetzt nur specielle Integrationsmethoden für dieselben. Meistens sucht man diese Gleichungen auf niedrigere Ordnungen zu reduciren. Was bis jetzt vorgetragen wurde, reicht hin, die in der Folge vorkommenden Integrationen zu verstehen.

Neun und fünfzigste Vorlesung.

Über den Gebrauch der Differenzial- und Integralrechnung bei der Summirung der Functionen und Reihen.

Die Summe jeder Function läßt sich mit Hülfe des Taylor'schen Lehrsatzes auf folgende Art durch eine Reihe ausdrücken:

Setzt man

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x), \quad \frac{df_1(x)}{dx} = f_2(x), \quad \frac{df_2(x)}{dx} = f_3(x), \text{ etc.},$$

so ist, dem Taylor'schen Satze zufolge:

$$\Delta f(x) = f_1(x) \cdot \Delta x + f_2(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + f_3(x) \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + f_4(x) \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x) \cdot \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} + f_{n+1}(x + \theta \Delta x) \cdot \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

wobei θ eine die Einheit nicht übersteigende positive Zahl anzeigt.

Nimmt man nun die Summen beider Theile dieser Gleichung, indem man Δx als beständig betrachtet, so ergibt sich

$$(1) \quad f(x) = \Delta x \Sigma f_1(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} \Sigma f_2(x) + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \Sigma f_3(x)$$
$$+ \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \Sigma f_4(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} \Sigma f_n(x) + \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \Sigma f_{n+1}(x + \theta \Delta x).$$

Man schreibe in dieser Gleichung $f(x)$ statt $f_1(x)$, also $\int f(x)\,dx$ statt $f(x)$, und $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, etc. statt $f_2(x), f_3(x), f_4(x)$, etc., so findet man

$$(2) \quad \Sigma f(x) = \frac{\int f(x)\,dx}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{1.2} \Sigma f_1(x) - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \Sigma f_2(x)$$
$$- \frac{\Delta x^3}{1.2.3.4} \Sigma f_3(x) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta x^{n-1}}{1.2.3\ldots n} \Sigma f_{n-1}(x) - \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots(n+1)} \Sigma f_n(x + \theta \Delta x).$$

Aus der Gleichung (1) selbst folgt, wenn man in derselben $n-1$ statt n setzt:

$$(3)\quad o = f(x) - \Delta x\, \Sigma f_1(x) - \frac{\Delta x^2}{1.2} \Sigma f_2(x) - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \Sigma f_3(x) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \Sigma f_{n-1}(x) - \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} \Sigma f_n(x + \theta_1 \Delta x),$$

wobei θ_1 ebenfalls nicht größer ist als 1, jedoch aber von θ verschieden seyn kann. Läßt man in dieser Gleichung nach und nach $f(x)$ in $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, 2c. übergehen, verringert man sie bei jedem Schritte um ein Glied, und multiplicirt man sie jedes Mal mit Δx, so erhält man die Gleichungen

$$(4)\quad o = f_1(x)\Delta x - \Delta x^2 \Sigma f_2(x) - \frac{\Delta x^3}{1.2} \Sigma f_3(x) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-2)} \Sigma f_{n-1}(x) - \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots(n-1)} \Sigma f_n(x + \theta_2 \Delta x),$$
$$o = f_2(x)\Delta x^2 - \Delta x^3 \Sigma f_3(x) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-3)} \Sigma f_{n-1}(x) - \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots(n-2)} \Sigma f_n(x + \theta_3 \Delta x)$$

u. s. w.,

endlich

$$o = f_{n-1}(x)\Delta x^{n-1} - \Delta x^n \Sigma f_n(x + \theta_n \Delta x).$$

Multipliciren wir nun die Gleichungen (3), (4) der Reihe nach mit den vor der Hand noch unbestimmten Größen H_1, H_2, H_3, 2c. H_n, und addiren wir die erhaltenen Producte zur Gleichung (2); lassen wir ferner zwischen diesen Multiplicatoren die Gleichungen

$$(5)\quad H_1 + \frac{1}{1.2} = o,$$
$$H_2 + \frac{H_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = o,$$
$$H_3 + \frac{H_2}{1.2} + \frac{H_1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = o$$

u. s. w.

bestehen, so haben wir

$$(6)\quad \Sigma f(x) = \frac{\int f(x)\,dx}{\Delta x} + H_1 f(x) + H_2 f_1(x)\Delta x + H_3 f_2(x)\Delta x^2 + \ldots$$
$$\ldots + H_n f_{n-1}(x)\Delta x^{n-1} + R_n + \textit{Const.},$$

wobei

$$(7)\quad R_n = -\Big[\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} \Sigma f_n(x + \theta \Delta x) + \frac{H_1}{1.2.3\ldots n} \Sigma f_n(x + \theta_1 \Delta x)$$
$$+ \frac{H_2}{1.2.3\ldots(n-1)} \Sigma f_n(x + \theta_2 \Delta x) + \frac{H_3}{1.2.3\ldots(n-2)} \Sigma f_n(x + \theta_3 \Delta x) + \ldots$$
$$\ldots + H_n \Sigma f_n(x + \theta_n \Delta x)\Big] \Delta x^n.$$

Wird

$$(8)\quad H_1 = A_1,\ H_2 = \frac{A_2}{1.2},\ H_3 = \frac{A_3}{1.2.3},\ \ldots.\ H_n = \frac{A_n}{1.2.3\ldots n}$$

gesetzt, so verwandeln sich die Gleichungen (5), da ein Bruch von der Form $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots(n-r)}$ dem Binomialcoefficienten $\binom{n}{r}$ gleich kommt, in

$$(9)\quad 1 + \binom{2}{1} A_1 = 0,$$

$$1 + \binom{3}{1} A_1 + \binom{3}{2} A_2 = 0,$$

$$1 + \binom{4}{1} A_1 + \binom{4}{2} A_2 + \binom{4}{3} A_3 = 0$$

u. s. w.

Diese Gleichungen haben wir bereits in der zwei und vierzigsten Vorlesung aufgelöst; wir fanden $A_1 = -\frac{1}{2}$, ferner

$$A_3 = A_5 = A_7 = \text{etc.} = 0$$

und $A_2 = B_1,\ A_4 = B_2,\ A_6 = B_3$, etc.,

wobei B_1, B_2, B_3, etc. die Bernoulli'schen Zahlen vorstellen: daher ist

$$(10)\quad H_1 = -\frac{1}{2},\ H_3 = H_5 = H_7 = \text{etc.} = 0 \text{ und}$$

$$H_2 = \frac{B_1}{1.2},\ H_4 = \frac{B_2}{1.2.3.4},\ H_6 = \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6},\ \text{etc.},$$

also

$$(11)\quad \Sigma f(x) = \frac{\int f(x)\,dx}{\Delta x} - \frac{1}{2}f(x) + \frac{B_1}{1.2} f_1(x)\,\Delta x$$

$$+ \frac{B_2}{1.2.3.4} f_3(x)\,\Delta x^3 + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{B_r}{1.2.3\ldots(2r-1)\,2r} f_{2r-1}(x)\,\Delta x^{2r-1} + R_{2r} + \mathit{Const.},$$

wobei

$$R_{2r} = -\Big[\frac{1}{1.2.3\ldots(2r+1)} \Sigma f_{2r}(x + \theta\Delta x)$$

$$+ \frac{B_1}{1.2.1.2.3\ldots(2r-1)} \Sigma f_{2r}(x + \theta_2 \Delta x)$$

$$+ \frac{B_2}{1.2.3.4.1.2.3\ldots(2r-3)} \Sigma f_{2r}(x + \theta_4 \Delta x) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{B_r}{1.2.3\ldots 2r} \Sigma f_{2r}(x + \theta_{2r}\Delta x)\Big]\,\Delta x_{2r} \text{ ist.}$$

Wir wollen die sich uns hier darbietende Gelegenheit benützen, noch

einige wichtige Eigenschaften der Bernoulli'schen Zahlen kennen zu lernen.

Die Formel (139) der ein und zwanzigsten Vorlesung gibt uns, wenn wir in derselben $\pi z = x$, also $z = \frac{x}{\pi}$ und

$$(12)\quad \left.\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = K_1 \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = K_2 \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = K_3 \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{2K_1}{\pi^2} = + C_1 \\ \frac{2K_2}{\pi^4} = - C_2 \\ \frac{2K_3}{\pi^6} = + C_3 \\ \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

setzen:

$$(13)\qquad \cot. x = \frac{1}{x} - C_1 x + C_2 x^3 - C_3 x^5 + \text{etc.}$$

Nun ist der am angeführten Orte aufgestellten Formel (131) gemäß $\cot. x = \frac{1 + \cos. 2x}{\sin. 2x}$ oder $\cot. x \,.\, \sin. 2x = 1 + \cos. 2x$; ferner (neunzehnte Vorlesung (87))

$$\sin. 2x = 2x - \frac{2^3 x^3}{1.2.3} + \frac{2^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{2^7 x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$

$$\cos. 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{1.2} + \frac{2^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{2^6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.};$$

es besteht demnach die identische Gleichung

$$2 \left.\begin{array}{l} - 2C_1 \\ - \frac{2^3}{1.2.3} \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + 2C_2 \\ + \frac{2^3 C_1}{1.2.3} \\ + \frac{2^5}{1.2.3.4.5} \end{array}\right\} x^4 \left.\begin{array}{l} - 2C_3 \\ - \frac{2^3 C_2}{1.2.3} \\ - \frac{2^5 C_1}{1.2.3.4.5} \\ - \frac{2^7}{1.2.3.4.5.6.7} \end{array}\right\} x^6 + \text{etc.} =$$

$$= 2 - \frac{2^2 x^2}{1.2} + \frac{2^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{2^6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

woraus

$$(14)\quad \begin{array}{l} C_1 + \frac{2^2}{1.2.3} = \frac{2}{1.2}, \\ C_2 + \frac{2^2 C_1}{1.2.3} + \frac{2^4}{1.2.3.4.5} = \frac{2^3}{1.2.3.4}, \\ C_3 + \frac{2^2 C_2}{1.2.3} + \frac{2^4 C_1}{1.2.3.4.5} + \frac{2^6}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{2^5}{1.2.3.4.5} \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{array}$$

folgt. Bringt man diese Gleichungen auf die Formen

$$(15)\quad \frac{C_1}{2^2} + \frac{H_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0,$$

$$\frac{C_2}{2^4} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{C_1}{2^2} + \frac{H_1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0,$$

$$\frac{C_3}{2^6} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{C_2}{2^4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{C_1}{2^2} + \frac{H_1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = 0$$

u. s. w.,

wobei $H_1 = -\frac{1}{2}$ ist, so zeigt die Vergleichung derselben mit den Gleichungen (5), daß

$$\frac{C_1}{2^2} = H_2, \quad \frac{C_2}{2^4} = H_4, \quad \frac{C_3}{2^6} = H_6, \text{ etc.}$$

seyn muß. Wir haben somit

$$(16)\quad C_1 = \frac{2^2 B_1}{1.2}, \quad C_2 = \frac{2^4 B_2}{1.2.3.4}, \quad C_3 = \frac{2^6 B_3}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc.},$$

also

$$(17)\quad \cot. x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1 x}{1.2} + \frac{2^4 B_2 x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.};$$

ferner

$$(18)\quad K_1 = \frac{2 B_1}{1.2} \pi^2, \quad K_2 = -\frac{2^3 B_2}{1.2.3.4} \pi^4, \quad K_3 = \frac{2^5 B_3}{1.2.3.4.5.6} \pi^6, \text{ etc.},$$

d. h.
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots = \frac{2 B_1}{1.2} \pi^2 = \frac{1}{6} \pi^2,$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots = -\frac{2^3 B_2}{1.2.3.4} \pi^4 = \frac{1}{90} \pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots\ldots = \frac{2^5 B_3}{1.2.3.4.5.6} \pi^6 = \frac{1}{945} \pi^6$$

u. s. w.

Es lassen sich also die in das Unendliche fortlaufenden Reihen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen mit geraden Exponenten mittelst der Bernoulli'schen Zahlen summiren. Merkwürdig ist es, daß diese Summen auf den Exponenten des Verhältnisses zwischen der Kreisperipherie und dem Durchmesser reducirt werden können. Aus den Gleichungen (18) erhellet zugleich, daß die numerischen Werthe der Glieder der Reihe B_1, B_2, B_3; B_4, etc. nothwendig mit abwechselnden Zeichen versehen sind, was sich aus den früheren Formeln für diese Zahlen nicht ergibt.

Da im Allgemeinen

$$K_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\ldots = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{2n-1} B_n}{1.2.3\ldots 2n} \pi^{2n},$$

$$K_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \ldots\ldots$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1} B_{n+1}}{1.2.3\ldots 2n(2n+1)(2n+2)} \pi^{2n+2}$$

ist, so haben wir

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} = -\frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot \frac{4\pi^2}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= -\frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot \frac{\pi^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Lassen wir nun n unendlich wachsen, so ergibt sich, da in dieser Hinsicht offenbar

$$lim. \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1 \quad \text{und} \quad lim. \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ ist:}$$

$$lim. \frac{B_{n+1}}{B_n} = -\, lim. \frac{n^2}{\pi^2}.$$

Es bilden also die numerischen Werthe der Bernoulli'schen Zahlen (welche, wie die Rechnung zeigt, bis zur dritten abnehmen, sodann aber wachsen) eine steigende Reihe, deren Glieder nicht nur allein jede gegebene Größe übertreffen können, sondern auch in einem größeren Verhältnisse zunehmen, als die Glieder jeder denkbaren geometrischen Progression.

Aus der Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots = S_n$$

lassen sich die der Reihen

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \ldots\ldots = T_n$$

und

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots = V_n$$

leicht ableiten. Es ist nämlich offenbar

$$(19) \quad T_n = S_n - \frac{S_n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) S_n = (2^n - 1)\frac{S_n}{2^n},$$
$$V_n = S_n - \frac{S_n}{2^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) S_n = (2^{n-1} - 1)\frac{S_n}{2^{n-1}}.$$

Hieraus folgt auch (ein und zwanzigste Vorlesung (141))

$$(20) \quad tg.\, x = (2^2 - 1) \cdot \frac{2^2 B_1 x}{1.2} - (2^4 - 1) \cdot \frac{2^4 B_2 x^3}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (2^6 - 1) \cdot \frac{2^6 B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \text{rc.}$$

und (neunzehnte Vorlesung (106))

$$(21)\quad l\,sin.\,x = lx - \frac{2B_1}{1.2}.x^2 + \frac{2^3B_2}{1.2.3.4}.\frac{x^4}{2} - \frac{2^5B_3}{1.2.3.4.5.6}.\frac{x^6}{3} + \text{ꝛc.}$$

Die Formel (11) kann in eine allgemeine Summirungsformel der Reihen umgestaltet werden, deren allgemeine Glieder als Functionen der zugehörigen Zeiger gegeben sind.

Es sey nämlich $f(x)$ das dem Zeiger x entsprechende Glied einer Reihe, welche mit dem Gliede, dessen Zeiger $=1$ ist, beginnt, und die Summe der x ersten Glieder dieser Reihe $=S_x$, also

$$S_x = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots + f(x),$$

so ist, der in der ein und vierzigsten Vorlesung gegebenen Formel (47) gemäß, wenn man daselbst x statt n schreibt:

$$S_x = \Sigma f(x+1);$$

welche Summe in Bezug auf $\Delta x = 1$ so bestimmt werden muß, daß sie für $x=0$ verschwindet. Nun ist

$$\Sigma f(x+1) = \Sigma f(x) + f(x),$$

folglich, wenn man statt $\Sigma f(x)$ den Ausdruck (11) setzt, indem man dort $\Delta x = 1$ nimmt:

$$(22)\quad S_x = \int f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{B_1}{1.2}f_1(x) + \frac{B_2}{1.2.3.4}f_3(x) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{B_r}{1.2.3\ldots2r}f_{2r-1}(x) + R_{2r} + Const.,$$

wobei

$$R_{2r} = \frac{-1}{1.2.3\ldots(2r+1)}\Sigma\Big[f_{2r}(x+\theta) + \binom{2r+1}{2}B_1 f_{2r}(x+\theta_2)$$
$$+\binom{2r+1}{4}B_2 f_{2r}(x+\theta_4) + \ldots\ldots + (2r+1)B_r f_{2r}(x+\theta_{2r})\Big]$$

ist. Die Constante muß so bestimmt werden, daß S_x für $x=0$ verschwindet; geht daher die Formel rechter Hand des Gleichheitszeichens ohne die Constante für $x=0$ in A über, so ist $Const. = -A$. Oft läßt sich der Werth von A aus der Formel (23) nicht entnehmen; in diesem Falle berechne man die Summe der vorgelegten Reihe für einen anderen Werth von x, z. B. für $x=n$, durch wirkliche Addition ihrer Glieder; ferner für eben diesen Werth von x den Betrag aller Glieder der Formel (23) rechter Hand des Gleichheitszeichens ohne die Constante; der Unterschied beider Resultate wird offenbar der Werth dieser Constante seyn.

Es ist demnach, wenn wir der angenommenen Bezeichnung getreu die durch wirkliche Addition gefundene Summe der a ersten Glie-

der der vorgelegten Reihe S_a nennen, und $f_{-1}(x)$ statt $\int f(x)\,dx$, ferner $\psi(r, x)$ statt R_{2r} schreiben:

$$(23)\quad S_x = f_{-1}(x) + \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{B_1}{1.2}f_1(x) + \frac{B_2}{1.2.3.4}f_3(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_r}{1.2.3\ldots 2r}f_{2r-1}(x) + \psi(r, x) + Const.,$$

wobei

$$Const. = S_a - f_{-1}(a) - \tfrac{1}{2}f(a) - \frac{B_1}{1.2}f_1(a) - \frac{B_2}{1.2.3.4}f_3(a) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{B_r}{1.2.3\ldots 2r}f_{2r-1}(a) - \psi(r, a)$$

ist. Wird für $f(x)$ eine ganze rationale Function vom m^{ten} Range angenommen, so verschwinden die Differenzialquotienten $f_{m+1}(x)$, $f_{m+2}(x)$, 2c., und die Reihen, welche sich in diesen Formeln rechter Hand des Gleichheitszeichens befinden, brechen ab. In jedem anderen Falle kann man dieselben beliebig weit fortsetzen. Da sie aber dann, wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... nicht zuletzt unendlich klein werden, der oben nachgewiesenen Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen zufolge, divergiren, so darf man die Ergänzungen $\psi(r, x)$, $\psi(r, a)$ nicht unberücksichtigt lassen. Die genaue Angabe dieser Ergänzungen ist jedoch nicht minder schwierig, als die Berechnung von S_x selbst; man muß sich daher begnügen, dieselben dadurch zu beurtheilen, daß man für jedes einzelne Glied der obigen Reihen eine Grenze aufsucht, welche die dazu gehörige Ergänzung nicht überschreitet. Folgende nach Erchinger's Anleitung angestellte Betrachtungen werden uns dazu verhelfen.

Setzt man die Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens in (23) über die Ergänzung $\psi(r, x)$ hinaus fort, so ergibt sich offenbar

$$(24)\quad \psi(r, x) = \frac{B_{r+1}}{1.2.3\ldots(2r+2)}f_{2r+1}(x) + \frac{B_{r+2}}{1.2.3\ldots(2r+4)}f_{2r+3}(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_{r+w}}{1.2.3\ldots(2r+2w)}f_{2r+2w-1}(x) + \psi(r+w, x).$$

Nun ist vermöge (18)

$$(25)\quad \frac{B_{r+1}}{1.2.3\ldots(2r+2)} = (-1)^r.2\left[\frac{1}{(2\pi)^{2r+2}} + \frac{1}{(4\pi)^{2r+2}} + \frac{1}{(6\pi)^{2r+2}} + \ldots\right]$$
$$\frac{B_{r+2}}{1.2.3\ldots(2r+4)} = (-1)^{r+1}.2\left[\frac{1}{(2\pi)^{2r+4}} + \frac{1}{(4\pi)^{2r+4}} + \frac{1}{(6\pi)^{2r+4}} + \ldots\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{B_{r+w}}{1.2.3\ldots(2r+2w)} = (-1)^{r+w-1}.2\left[\frac{1}{(2\pi)^{2r+2w}} + \frac{1}{(4\pi)^{2r+2w}} + \frac{1}{(6\pi)^{2r+2w}} + \ldots\right]$$

folglich hat man

$$(-1)^r \cdot \tfrac{1}{2} \psi(r, x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2r+2}} f_{2r+1}(x) - \frac{1}{(2\pi)^{2r+4}} f_{2r+3}(x) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(-1)^{w-1}}{(2\pi)^{2r+2w}} f_{2r+2w-1}(x) + \Psi_1$$
$$+ \frac{1}{(4\pi)^{2r+2}} f_{2r+1}(x) - \frac{1}{(4\pi)^{2r+4}} f_{2r+3}(x) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(-1)^{w-1}}{(4\pi)^{2r+2w}} f_{2r+2w-1}(x) + \Psi_2$$
$$+ \frac{1}{(6\pi)^{2r+2}} f_{2r+1}(x) - \frac{1}{(6\pi)^{2r+4}} f_{2r+3}(x) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(-1)^{w-1}}{(6\pi)^{2r+2w}} f_{2r+2w-1}(x) + \Psi_3$$

rc.,

wenn man nämlich die Ergänzung $\psi(r+w, x)$, indem man sie unter die einzelnen horizontalen Reihen, so wie es das Bildungsgesetz derselben fordert, vertheilt denkt,

$$= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \ldots\ldots \text{ setzt.}$$

Bezeichnet man die Totalwerthe der horizontalen Reihen durch X_1, X_2, X_3, rc., so ergibt sich für $(-1)^r \cdot \frac{1}{2} \psi(r, x)$ der unendliche Ausdruck

$$(26) \qquad X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots$$

Im Allgemeinen ist

$$(27) \quad X_n = \frac{1}{(2n\pi)^{2r+2}} f_{2r+1}(x) - \frac{1}{(2n\pi)^{2r+4}} f_{2r+3}(x)$$
$$+ \frac{1}{(2n\pi)^{2r+6}} f_{2r+5}(x) - \text{rc.} + \frac{(-1)^{w-1}}{(2n\pi)^{2r+2w}} f_{2r+2w-1}(x) + \Psi_n.$$

Aus dieser Gleichung folgt, in so fern die Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens in das Unendliche fortgesetzt, eine convergirende ist, durch zweimaliges Differenziren derselben in Bezug auf x:

$$(28) \qquad \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (2n\pi)^2 X_n - \frac{1}{(2n\pi)^{2r}} f_{2r+1}(x) = 0.$$

Aber dieses Resultat ist von der Beschaffenheit der Function $f_{2r+1}(x)$, welche die Convergenz der erwähnten Reihe bedingt, unabhängig, es besteht daher in allen Fällen.

Die Integration der Differenzialgleichung (28) hängt, wie in der fünf und fünfzigsten Vorlesung gesagt wurde, von jener der Gleichung

$$(29) \quad \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (2n\pi)^2 X_n = 0$$

ab. Zwei partikuläre Integralien derselben sind

$$X_n = \sin. 2n\pi x \quad \text{und} \quad X_n = \cos. 2n\pi x,$$

daher findet man nach der in der angeführten Vorlesung ertheilten Anleitung:

$$X_n = \frac{\cos. 2n\pi x}{(2n\pi)^{2r+1}} \int f_{2r+1}(x)\, dx \sin. 2n\pi x$$

$$- \frac{\sin. 2n\pi x}{(2n\pi)^{2r+1}} \int f_{2r+1}(x)\, dx \cos. 2n\pi x.$$

Aber n ist eine ganze Zahl; der Werth, welchen x nach verrichteter Integration erhält, ist es auch: folglich ist außerhalb der Integralzeichen $\sin. 2n\pi x = 0$, $\cos. 2n\pi x = 1$, und daher

$$X_n = \frac{1}{(2n\pi)^{2r+1}} \int f_{2r+1}(x)\, dx \sin. 2n\pi x.$$

Der numerische Werth von $\sin. 2n\pi x$ ist nie größer als die Einheit, folglich ist jener von X_n nie größer als $\frac{1}{(2n\pi)^{2r+1}} \int f_{2r+1}(x)\, dx$, d. h. nie größer als $\frac{f_{2r}(x)}{(2n\pi)^{2r+1}} + C$, wobei C eine beständige Größe bezeichnet. Diese können wir zu der in (23) ersichtlich gemachten Constante hinzuzählen; daher ist X_n nie größer als $\frac{f_{2r}(x)}{(2n\pi)^{2r+1}}$. Hieraus folgt offenbar, daß $(-1)^r \frac{1}{2} \psi(r, x)$ nicht größer ist als

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^{2r+1}} + \frac{1}{(4\pi)^{2r+1}} + \frac{1}{(6\pi)^{2r+1}} + \ldots\right) f_{2r}(x), \text{ also}$$

$$(-1)^r \cdot \psi(r, x) < 2\left[\frac{1}{(2\pi)^{2r}} + \frac{1}{(4\pi)^{2r}} + \frac{1}{(6\pi)^{2r}} + \ldots\right] f_{2r}(x)$$

$$\text{oder } -\psi(r, x) < \frac{B_r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2r} f_{2r}(x),$$

wodurch sich der Grad der Genauigkeit eines mittelst der Formel (23) erhaltenen Resultates leicht beurtheilen läßt. Daß das hier Gesagte auch auf die Formel (11) angewendet werden kann, ist für sich klar.

So lange die Differenzialquotienten $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ꝛc. eine fallende Reihe bilden, ist um so mehr

$$-\psi(r, x) < \frac{B_r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2r} f_{2r-1}(x),$$

d. h. unter dieser Voraussetzung ist in den Reihen rechter Hand des Gleichheitszeichens in (23) der numerische Werth der auf jedes ein-

zelne Glied folgenden Ergänzung kleiner, als das genannte Glied selbst.

Wir wollen nun noch einige Ergebnisse der hier entwickelten Formeln, welche sich auf Gegenstände früherer Vorlesungen beziehen, in der Kürze berühren.

Es ist

$\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z)$, folglich $l\Pi(z+1) - l\Pi(z) = l(z+1)$; oder, wenn wir $\Delta z = 1$ annehmen, $\Delta l\Pi(z) = l(z+1)$, woraus sich $l\Pi(z) = \Sigma l(z+1)$ ergibt. Wir erhalten demnach mittelst der Formel (11) wegen $\int dz lz = zlz - \int z dlz = zlz - z$

$$l\Pi(z) = Const. + (z+\tfrac{1}{2})lz - z + \frac{B_1}{1.2.z} + \frac{B_2}{3.4.z^3} + \frac{B_3}{5.6.z^5} + \ldots,$$

welche Formel aber nur auf positive Werthe von z anwendbar, und zum practischen Gebrauche um so tauglicher ist, je mehr z die Einheit überschreitet. Zur Bestimmung der Constante könnte zwar der oben angedeutete Weg eingeschlagen werden; allein folgende Betrachtung führt sogleich zum Ziele.

Lassen wir in letzterer Gleichung z eine ganze positive Zahl seyn und unendlich wachsen, so finden wir

$$Const. = lim. [l\Pi(z) - (z+\tfrac{1}{2})lz + z]$$
$$= lim. [l(1.2.3\ldots z) - (z+\tfrac{1}{2})lz + z];$$

oder wenn wir 2z statt z setzen:

$$Const. = lim. [l(1.2.3\ldots 2z) - (2z+\tfrac{1}{2})l2z + 2z];$$

der erstere Ausdruck läßt sich aber auch auf die Form

$$Const. = lim. [l(2.4.6\ldots 2z) - zl2 - (z+\tfrac{1}{2})lz + z]$$

bringen; welche Gleichung, von der vorhergehenden abgezogen,

$$0 = lim. [l(1.3.5\ldots 2z-1) - (z+\tfrac{1}{2})l2 - zlz + z]$$

gibt. Ziehen wir diese Gleichung von der ihr vorhergehenden ab, so erhalten wir endlich

$$Const. = lim. \left[l\,\frac{2.4.6\ldots(2z-2).(2z)^{\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots\ldots(2z-1)} + l2 \right]$$
$$= l\left[2\,lim.\frac{2.4.6\ldots(2z-2).(2z)^{\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots\ldots(2z-1)}\right] = l2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}l(2\pi).$$

Es ist also

$$(30)\quad l\Pi(z) = (z+\tfrac{1}{2})lz - z + \tfrac{1}{2}l2\pi + \frac{B_1}{1.2.z} + \frac{B_2}{3.4.z^3} + \frac{B_3}{5.6.z^5} + \text{rc.}$$

Differenziren wir diese Gleichung, so ergibt sich mit Rücksicht auf die in der zwei und fünfzigsten Vorlesung gebrauchte Bezeichnung:

$$(31)\quad \Psi(z) = lz + \frac{1}{2z} - \frac{B_1}{2z^2} - \frac{B_2}{4z^4} - \frac{B_3}{6z^6} - \ldots\ldots$$

Für ein hinreichend großes z findet man den Werth von $\Psi(z)$ mittelst dieser Formel so genau als man will. Aus demselben lassen sich die Werthe dieser Function für kleinere z leicht ableiten. Denn es ist

$$\Psi(z+1) = \frac{dl\Pi(z+1)}{dz} = \frac{dl[(z+1)\Pi(z)]}{dz} = \Psi(z) + \frac{1}{z+1},$$

folglich für jede ganze positive Zahl n

$$\Psi(z+n) = \Psi(z) + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3} + \ldots + \frac{1}{z+n},$$

und somit

$$(32)\quad \Psi(z) = \Psi(z+n) - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \ldots\ldots - \frac{1}{z+n}.$$

Insbesondere ist

$$(33)\quad \Psi(0) = \Psi(n) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots \frac{1}{n}.$$

Diese Gleichung, verbunden mit (31), kann zur Berechnung von $\Psi(0) = -H$ (zwei und fünfzigste Vorlesung) gebraucht werden, die sich hiedurch mit jeder beliebigen Schärfe bewerkstelligen läßt. Die wirkliche Rechnung gibt für $n = 10$

$$\Psi(0) = -0{\cdot}5772156649015325\ldots,$$

wobei die vorletzte Decimalstelle noch richtig ist.

Sechzigste Vorlesung.

Über die Variationsrechnung.

Es sey u eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Größen $x, y, z, \ldots$, welche Beziehung wir durch die Gleichung:

$$(1) \qquad u = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

ausdrücken wollen. Nehmen wir an, die Art und Weise, wie u von $x, y, z, \ldots$ abhängt, d. h. die Form der Function φ ändere sich, diese Function gehe z. B. in $\psi(x, y, z, \ldots)$ über, so wird u deßhalb eine Änderung erleiden, deren Betrag

$$= \psi(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots)$$

ist, und bei der unendlichen Annäherung der Function ψ an φ in den Zustand des unendlichen Abnehmens übergeht.

Man nennt eine durch die Formänderung einer Function erzeugte unendlich klein werdende Änderung derselben ihre Variation, und bezeichnet sie durch den der Function vorgesetzten Buchstaben δ. Es ist demnach in Bezug auf das so eben Gesagte

$$(2) \qquad \delta u = \psi(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots).$$

Nebst dem Übergange der Function φ in ψ können auch noch die Größen $x, y, z, \ldots$ selbst um unendlich abnehmende Unterschiede geändert werden, und dadurch auf die Variation von u einwirken. Diese Unterschiede heißen ebenfalls Variationen der zugehörigen Größen, und werden durch die oben angegebene Bezeichnung bemerklich gemacht. Im allgemeinsten Sinne ist also

$$(3) \qquad \delta u = \psi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots).$$

Obschon diesen Erklärungen zufolge zwischen Variationen und Differenzialien veränderlicher Größen ein wesentlicher Unterschied zu bestehen scheint, indem erstere eine Änderung der zwischen diesen Größen bestehenden Verknüpfung, letztere aber gerade das Gegentheil voraussetzen, so lassen sich doch die Variationen auch als Differenzialien betrachten, und erfordern somit im Grunde keine eigenthümliche Bezeichnung.

Man kann sich nämlich immerhin vorstellen, die Größe u hänge

nicht bloß von $x, y, z, \ldots$, sondern überdieß noch von der Variablen t dergestalt ab, daß der Ausdruck (1) nur ein specieller, der Annahme $t = c$, wobei c eine beständige Größe bedeutet, entsprechender Fall der Relation

$$(4) \qquad u = \Phi(x, y, z, \ldots t)$$

ist; und die Änderung der Beziehung, in welcher u zu $x, y, z, \ldots$ steht, sey nichts weiter, als ein Ergebniß der Änderung des Werthes der Größe t. Dieß vorausgesetzt, drückt das partielle Differenzial

$$(5) \qquad \frac{du}{dt}\, dt$$

unter der Annahme $t = c$ die Variation von u im Sinne der Gleichung (2) aus.

In so fern aber auch $x, y, z, \ldots$ variiren sollen, ist es, wie die Folge zeigen wird, völlig hinreichend, diese Variablen als unbestimmte Functionen von t zu behandeln. Daher ist die Variation von u im Sinne der Gleichung (3)

$$(6) = \left(\frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \ldots \ldots + \frac{du}{dt}\right) dt,$$

wobei man nach verrichteter Differenziation $t = c$ gesetzt denken muß.

Allein durch den Gebrauch der früher aufgestellten Bezeichnung wird der Algorithmus der Variationsrechnung ungemein vereinfacht, und deßwegen wollen wir uns derselben durchgehends bedienen.

In allen analytischen Untersuchungen, welche des Variations-Calculs bedürfen, erscheint die Relation zwischen den dabei in Erwägung zu ziehenden Variablen als eine unbestimmte, und meistens ist eben die Ausmittelung dieser Relation der Zweck der Rechnung.

Es sey nun u eine unbestimmte Function von $x, y, z, \ldots$, V hingegen eine bestimmte Function der Größen $u, x, y, z, \ldots$ und der Differenzialquotienten

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx\,dy}, \ldots,$$

so findet man die durch die Umwandlung von $u, x, y, z, \ldots$ in $u + \delta u$, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $\ldots$ erzeugte Variation von V offenbar mittelst derselben Rechnungsoperationen, mittelst welcher man das Differenzial von V erhalten würde, nur tritt dabei das Variationszeichen an die Stelle des Differenzialzeichens.

Wir können hier nicht unbemerkt lassen, daß es, wenn eine Größe hinter einander den Operationen des Differenzirens und des Variirens

zu unterwerfen ist, auf das Resultat der Rechnung keinen Einfluß habe, welche dieser Operationen man zuerst vornimmt; oder in Zeichen: es ist für jede Variable z

$$(7) \qquad \delta dz = d\delta z.$$

Denn da $\delta(z + dz) = \delta z + \delta dz$ ist, so haben wir

$$\delta dz = \delta(z + dz) - \delta z.$$

Aber in δz die Variable z in $z + dz$ übergehen lassen, und sodann δz davon abziehen, heißt δz differenziren, daher ist auch

$$\delta(z + dz) - \delta z = d\delta z,$$

woraus die Richtigkeit der Gleichung (7) von selbst folgt. Wir können nun weiter schließen, daß

$$(8) \qquad \delta d^2 z = \delta ddz = d.\delta dz = dd\delta z = d^2 \delta z,$$
$$\delta d^3 z = \delta d^2 dz = d^2 \delta dz = d^2 d\delta z = d^3 \delta z,$$

und allgemein $\delta d^n z = d^n \delta z$ seyn muß.

Nehmen wir, um einen einfacheren Fall vor Augen zu haben, zuerst an, V enthalte bloß zwei veränderliche Größen y und x, wovon die erste eine unbestimmte Function der zweiten ist, nebst den Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{dx} = s, \text{ u. s. w.},$$

so hat das Differenzial von V die Form

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dp}dp + \frac{dV}{dq}dq + \frac{dV}{dr}dr + \ldots\ldots$$

Hieraus ergibt sich, wie wir oben erinnert haben:

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dp}\delta p + \frac{dV}{dq}\delta q + \frac{dV}{dr}\delta r + \ldots\ldots$$

Es ist aber

$$\delta p = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta x}{dx}$$
$$= \frac{d(\delta y - p\,\delta x)}{dx} + \frac{dp}{dx}\delta x = \frac{d(\delta y - p\,\delta x)}{dx} + q\,\delta x;$$

ferner, da q zu p und r in derselben Beziehung steht, wie p zu y und q:

$$\delta q = \frac{d(\delta p - q\,\delta x)}{dx} + r\,\delta x = \frac{d^2(\delta y - p\,\delta x)}{dx^2} + r\,\delta x;$$

und aus demselben Grunde

$$\delta r = \frac{d^3(\delta y - p\delta x)}{dx^3} + s\delta x$$

u. s. w.,

wenn nämlich dx bei dem Differenziren als constant behandelt wird.

Setzen wir der Kürze wegen $\delta y - p\delta x = \delta\omega$, und führen wir diese Resultate in den obigen Ausdruck für δV ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichung $\delta y = p\delta x + \delta\omega$:

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}p + \frac{dV}{dp}q + \frac{dV}{dq}r + \frac{dV}{dr}s + \ldots\right)\delta x$$
$$+ \frac{dV}{dy}\delta\omega + \frac{dV}{dp}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx} + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{dV}{dr}\cdot\frac{d^3\delta\omega}{dx^3} + \ldots;$$

oder weil

$$\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}p + \frac{dV}{dp}q + \frac{dV}{dq}r + \frac{dV}{dr}s + \ldots\right)dx = dV \text{ ist:}$$

(9) $$\delta V =$$
$$= \frac{1}{dx}dV\delta x + \frac{dV}{dy}\delta\omega + \frac{dV}{dp}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx} + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{dV}{dr}\cdot\frac{d^3\delta\omega}{dx^3} + \ldots,$$

welcher Ausdruck die allgemeine Form der Variation jeder Function der Größen x, y und der Differenzialquotienten von y darstellt. In demselben steht $\frac{1}{dx}dV$ statt $\frac{dV}{dx}$, um keine Verwechslung dieses Quotienten, in welchem dV das vollständige Differenzial von V bedeutet, mit dem in Bezug auf x genommenen partiellen Differenzialquotienten zu veranlassen.

Erscheint in V noch eine andere von x abhängende Variable z nebst den Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx} = p_1$, $\frac{dp_1}{dx} = q_1$, $\frac{dq_1}{dx} = r_1$, rc., so müssen zu dem Ausdrucke (9) noch die Glieder

$$\frac{dV}{dz}\delta\omega_1 + \frac{dV}{dp_1}\cdot\frac{d\delta\omega_1}{dx} + \frac{dV}{dq_1}\cdot\frac{d^2\delta\omega_1}{dx^2} + \frac{dV}{dr_1}\cdot\frac{d^3\delta\omega_1}{dx^3} + \ldots\ldots$$

hinzugefügt werden, in welchen $\delta\omega_1 = \delta z - p_1\delta x$ ist.

Es sey zweitens V eine Function von x, y, z und den sich auf x und y als independente Größen beziehenden Differenzialquotienten von z, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,\ \frac{d^2z}{dx^2} = r,\ \frac{d^2z}{dx\,dy} = s,\ \frac{d^2z}{dy^2} = t, \text{ rc., so ist}$$

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz + \frac{dV}{dp}dp + \frac{dV}{dq}dq + \frac{dV}{dr}dr$$
$$+ \frac{dV}{ds}ds + \frac{dV}{dt}dt + \ldots\ldots\ldots,$$

folglich

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z + \frac{dV}{dp}\delta p + \frac{dV}{dq}\delta q + \frac{dV}{dr}\delta r + \frac{dV}{ds}\delta s + \frac{dV}{dt}\delta t + \ldots\ldots\ldots$$

Nun haben wir

$$\delta p = \delta \frac{dz}{dx} = \frac{d\delta z}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d(\delta z - p\delta x)}{dx} + \frac{dp}{dx}\delta x.$$

Betrachten wir der Einfachheit der Rechnung wegen δy als eine von x unabhängige Größe, so können wir obiger Variation die Form

$$\delta p = \frac{d(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx} + \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}\delta y$$

geben. Auf gleiche Weise erhalten wir, wenn wir δx von y unabhängig seyn lassen:

$$\delta q = \frac{d(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dy} + \frac{dq}{dx}\delta x + \frac{dq}{dy}\delta y;$$

ferner $\delta r = \delta\frac{dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dx}$

$$= \frac{d^2(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx^2} + \frac{dr}{dx}\delta x + \frac{dr}{dy}\delta y,$$

$$\delta s = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx\,dy} + \frac{ds}{dx}\delta x + \frac{ds}{dy}\delta y,$$

$$\delta t = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dy^2} + \frac{dt}{dx}\delta x + \frac{dt}{dy}\delta y$$

u. s. w.

Hiedurch wird, wenn wir $\delta z - p\delta x - q\delta y = \delta\omega$ setzen, wegen $\delta z = p\delta x + q\delta y + \delta\omega$:

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dV}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} + \ldots\right)\delta x$$
$$+ \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{dV}{dp}\cdot\frac{dp}{dy} + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{dq}{dy} + \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dy} + \ldots\right)\delta y$$
$$+ \frac{dV}{dz}\delta\omega + \frac{dV}{dp}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx} + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d\delta\omega}{dy} + \frac{dV}{dr}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{dV}{ds}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx\,dy}$$
$$+ \frac{dV}{dt}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dy^2} + \ldots\ldots\ldots$$

Aber die Größen, welche mit δx und δy multiplicirt erscheinen, sind offenbar die in Bezug auf x und auf y genommenen partiellen Differenzialien von V, in so fern die Größe z bereits durch x und y ausgedrückt worden ist; bezeichnen wir diese Differenzialquotienten der

Unterscheidung willen durch die Symbole $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dV}{dy}\right)$, so haben wir

$$(10) \qquad \delta V =$$
$$= \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \frac{dV}{dz}\delta\omega + \frac{dV}{dp}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx} + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d\delta\omega}{dy}$$
$$+ \frac{dV}{dr}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{dV}{ds}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx\,dy} + \frac{dV}{dt}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dy^2} + \ldots\ldots\ldots$$

Es sey nun die Variation des Integrals $\int V\,dx$ zu berechnen, in welchem V eine gegebene Function der von x auf eine unbestimmte Weise abhängenden Größen y, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, ꝛc. z, $\frac{dz}{dx} = p_1$, $\frac{dp_1}{dx} = q_1$, $\frac{dq_1}{dx} = r_1$, ꝛc. vorstellt.

Setzen wir $\int V\,dx = W$, so folgt

$$dW = V\,dx \quad \text{und} \quad d\delta W = \delta(V\,dx),$$

folglich $\delta W = \int\delta(V\,dx)$, d. h. $\delta\int V\,dx = \int\delta(V\,dx)$.

Aber es ist $\delta(V\,dx) = \delta V\,dx + V\,d\delta x$, also

$$\delta\int V\,dx = \int(\delta V\,dx + V\,d\delta x) = V\delta x + \int(\delta V\,dx - dV\,\delta x);$$

weil, der Formel (82) zu Folge, welche wir in der zwei und fünfzigsten Vorlesung kennen gelernt haben, die Gleichung

$$\int V\,d\delta x = V\delta x - \int dV\,\delta x$$

besteht; daher finden wir, wenn wir die Formel (9) zu Hülfe nehmen:

$$\delta\int V\,dx =$$
$$= V\delta x + \int\left(\frac{dV}{dy}\delta\omega\,dx + \frac{dV}{dp}d\delta\omega + \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \frac{dV}{dz}\delta\omega_1\,dx + \frac{dV}{dp_1}d\delta\omega_1 + \frac{dV}{dq_1}\cdot\frac{d^2\delta\omega_1}{dx} + \ldots\right).$$

Da die so eben erwähnte Formel (82) der zwei und fünfzigsten Vorlesung

$$\int\frac{dV}{dp}\,d\delta\omega = \frac{dV}{dp}\,\delta\omega - \int d\,\frac{dV}{dp}\,\delta\omega$$
$$\int\frac{dV}{dq}\cdot\frac{d^2\delta\omega}{dx} = \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx} - \int d\,\frac{dV}{dq}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx}$$
$$= \frac{dV}{dq}\cdot\frac{d\delta\omega}{dx} - \frac{1}{dx}\cdot d\,\frac{dV}{dq}\,\delta\omega + \int\frac{1}{dx}\,d^2\,\frac{dV}{dq}\,\delta\omega.$$

u. s. w. gibt, so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$(11) \qquad \delta \int V dx =$$

$$= V \delta x + \left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dq} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dr} - \ldots\ldots\right) \delta\omega$$
$$+ \left(\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dr} + \ldots\ldots\ldots\right) \frac{d\delta\omega}{dx}$$
$$+ \left(\frac{dV}{dr} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right) \frac{d^2\delta\omega}{dx^2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{dV}{dp_1} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dq_1} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dr_1} - \ldots\ldots\right) \delta\omega_1$$
$$+ \left(\frac{dV}{dq_1} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dr_1} + \ldots\ldots\ldots\right) \frac{d\delta\omega_1}{dx}$$
$$+ \left(\frac{dV}{dr_1} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right) \frac{d^2\delta\omega_1}{dx^2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int \Big[\left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot \frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx^3} d^3 \frac{dV}{dr} + \ldots\right) \delta\omega$$
$$+ \left(\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot \frac{dV}{dp_1} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dq_1} - \frac{1}{dx^3} d^3 \frac{dV}{dr_1} + \ldots\right) \delta\omega_1$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big] dx.$$

Auf dieselbe Art wird man die Variation einer Integralformel von der Gestalt $\int\int V dx dy$ darstellen können, in welcher die eine Integration bloß auf die veränderliche x, die andere hingegen bloß auf die veränderliche y sich bezieht, und V dieselbe Beschaffenheit besitzt, die der Formel (10) zum Grunde liegt. Das hier Gesagte reicht hin, die in der Folge vorkommenden Rechnungen verstehen zu können.

Die Formel (11) bietet uns Gelegenheit dar, eine wichtige Bemerkung zu machen. Die zwischen y und x, wie auch zwischen z und x u. s. w. bestehende Verknüpfung ist völlig unbestimmt gelassen worden, und nur wenn diese gegeben ist, kann im Allgemeinen die Integration der Differenzialformel $V dx$ bewerkstelliget werden. Allein es könnte auch V so gestaltet seyn, daß sich diese Integration unabhängig von jeder zwischen den genannten Variablen Statt findenden Relation ausführen läßt, was offenbar der Fall seyn wird, wenn $V dx$ unmittelbar durch Differenziation einer bestimmten Function dieser veränderlichen Größen und ihrer Differenzialquotienten entstanden ist. Vermag man aber $\int V dx$ durch einen der Integration nicht mehr unterliegenden Ausdruck anzugeben, so muß dieß auch mit der Variation dieses Integrals geschehen können, und daher wird es unter der gemachten

Voraussetzung gewiß möglich seyn, das Integral rechter Hand des Gleichheitszeichens in der Formel (11) wegzubringen. Aber wegen der Unbestimmtheit der Factoren $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, ꝛc. kann die an dem angeführten Orte angezeigte Integration nicht wirklich verrichtet werden; daher reduciren sich die Ausdrücke unter dem Integralzeichen auf die Nulle, was wieder nur in so fern angeht, als die Gleichungen

$$(12)\quad \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx^3} d^3 \frac{dV}{dr} + \ldots = 0$$

$$\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp_1} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dq_1} - \frac{1}{dx^3} d^3 \frac{dV}{dr_1} + \ldots = 0$$

u. s. w.

bestehen. Diese Gleichungen drücken daher die Bedingung der unmittelbaren Integrabilität des Differenzials $V\,dx$ aus.

Der wichtigste Gebrauch der Variationsrechnung besteht in der Anwendung derselben auf die Bestimmung der Relationen, welche zwischen den in einer Integralformel erscheinenden veränderlichen Größen Statt finden müssen, damit diese Integralformel den größten oder kleinsten Werth erhalte, dessen sie in Bezug auf gegebene Grenzen der Werthe der Variablen fähig ist.

Um von den zur Auflösung der Aufgaben dieser Art dienlichen Rechnungen eine Vorstellung zu gewähren, wird es hinreichend seyn, einen einfacheren Fall zu betrachten. Die weitere Erörterung dieses Gegenstandes läßt sich am zweckmäßigsten erst in der Folge vornehmen, wo wir es mit den Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik zu thun haben werden.

Es sey V eine Function von x, y, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, ꝛc., und die Gleichung zwischen x und y anzugeben, für welche das Integral $\int V\,dx$, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, ein Größtes oder Kleinstes wird.

Wenn, unter der Voraussetzung $y = \varphi(x)$,

$$\int_a^b V\,dx = F(a, b)$$

ist, und an die Stelle der Gleichung $y = \varphi(x)$ die sich ihr unendlich annähernde $y = \psi(x)$ tritt, so erleidet $F(a, b)$ eine Änderung, deren unendlich abnehmenden Betrag die Variation $\delta F(a, b)$ ausdrückt. Soll $F(a, b)$ in Bezug auf jede andere Verbindung, welche zwischen x und y Statt finden könnte, als ein Maximum oder Minimum er-

scheinen, so muß, den in der fünf und vierzigsten Vorlesung auseinander gesetzten Gründen zufolge, $\delta F(a, b)$ verschwinden, und zugleich die erste nicht verschwindende der höheren Variationen $\delta^2 F(a, b)$, $\delta^3 F(a, b)$, 2c. von gerader Ordnung seyn. Je nachdem diese positiv oder negativ ausfällt, besitzt $F(a, b)$ den kleinsten oder den größten Werth, dessen genannte Größe fähig ist.

Um die in der Frage stehende Relation zwischen x und y zu finden, setze man also

$$(13) \qquad \delta \int_a^b V\,dx = 0.$$

Die Variation des Integrals $\int_a^b V\,dx$ kann mittelst der Formel (10) so dargestellt werden, daß kein Differenzial der Variationen δx und δy unter dem Integralzeichen sich befindet. Bedenken wir zugleich, daß das Integral für $x = a$ verschwinden soll, und nach verrichteter Integration b an die Stelle von x kömmt, so müssen die Werthe, welche die in erwähnter Formel vor dem Integralzeichen vorkommenden Glieder für $x = a$ erhalten, von jenen subtrahirt werden, welche die Substitution $x = b$ darbietet. Hiedurch ergibt sich die Gleichung

$$(14) \quad 0 = B - A + \int_a^b \left[\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}\,d^2\,\frac{dV}{dq} - \ldots\right] dx\,\delta\omega,$$

wobei $\delta\omega = \delta y - p\,\delta x$ ist, ferner B und A die Summen der Werthe vorstellen, welche die dem Integralzeichen in (10) vorangehenden Glieder für $x = b$ und $x = a$ annehmen.

Hier können nun zwei Fälle Statt finden; es sind die Grenzwerthe der Variablen x, nämlich a und b, entweder durchaus unveränderliche Größen, oder sie sind selbst veränderlich, und die ihnen zugehörigen Werthe von y werden durch Bedingungsgleichungen bestimmt. Im ersten Falle lassen a und b weder Variationen noch Differenzialien von Variationen zu; die Größe $\delta\omega$, auf $x = a$ und $x = b$ bezogen, verschwindet, und deßhalb verschwinden auch B und A, wodurch die Gleichung

$$\int_a^b \left[\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}\,d^2\,\frac{dV}{dq} - \ldots\right] dx\,\delta\omega = 0$$

zurückbleibt, aus welcher wegen der Unbestimmtheit von $\delta\omega$

$$(15) \qquad \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}\,d^2\,\frac{dV}{dq} - \ldots = 0$$

folgt. Diese letztere Gleichung gibt nach vollbrachter Integration die

zu suchende Gleichung zwischen x und y, die aber noch der oben angedeuteten Prüfung zu unterziehen ist, wenn nicht etwa die Natur der vorgelegten Aufgabe über die Existenz des Maximums oder Minimums keinen Zweifel übrig läßt.

Im zweiten Falle stelle man sich vor, man habe bereits für a und b diejenigen Werthe gewählt, welche die Gleichung (14) realisiren, und lasse dieselben unveränderlich seyn, so kömmt man wieder auf die Gleichung (15), woraus zu ersehen ist, daß die Veränderlichkeit von a und b auf die zwischen x und y im Zustande des Maximums oder Minimums des Integrals $\int_a^b V dx$ bestehende Verbindung keinen Einfluß ausübt. Aus (15) und (14) folgt nun $B - A = 0$, also da b von a nicht abhängt, $B = 0$, $A = 0$; welche Gleichungen über die zur Lösung der vorgelegten Aufgabe nöthige Beschaffenheit von a und b näheren Aufschluß ertheilen.